

Forord

Servoteknikk omhandler videregående reguleringsteknikk for monovariabel, lineære systemer med anvendelser innen styring av elektromekaniske systemer. Det er lagt særlig vekt på frekvensanalytiske metoder, energibetraktninger og på prosessorientert regulatordesign hvor egenskapene til den enkelte prosess avgjør valg av metode for analyse og design av reguleringssystemet. Stoffet krever en bakgrunn innen reguleringsteknikk som tilsvarer et vanlig introduksjonskurs med transferfunksjoner, frekvensanalyse og syntese av PID-regulatorer.

Boken er skrevet i forbindelse med utarbeidelsen av faget “Servoteknikk” som er obligatorisk for tredje årskurs på fagretningen teknisk kybernetikk ved NTH. Boken er tenkt både som en lærebok for tredje eller fjerde årskurs ved NTH eller i tredje årskurs ved ingeniørhøgskolene, og for bruk innen forskning og utvikling for sivilingeniører med reguleringsteknisk bakgrunn.

Typiske prosesser som likestrømsmotoren og hydrauliske servomotorer er beskrevet i detalj slik at leseren skal være istand til å utvikle konvensjonelle reguleringssystemer for disse prosessene etter å ha gått igjennom stoffet. På den annen side kan behandlingen av disse prosessene også sees på som *case studies* hvor en generell metodikk for reguleringsteknisk analyse og syntese demonstreres. Denne kombinasjonen mellom analyse og beskrivelse av konvensjonelle løsninger karakteriserer boken. Bakgrunnen for dette er at servoteknikk er et velutviklet fagfelt hvor mange gode metoder og løsninger finnes, og det er viktig at en kybernetiker kjenner disse løsningene. For å kunne videreutvikle systemene og anvende servoteknikk på nye anvendelser er det imidlertid viktig at man også behersker de nødvendige analyse- og syntesemetoder.

For å gi lesere den regneferdighet som er nødvendig for å studere lineære reguleringssystemer, er mange detaljerte utledninger tatt med. Dette resulterer nødvendigvis i at det blir mange ligninger, men det er min erfaring at mange lesere blir unødige heftet hvis de skal lese litteratur hvor spranget fra en ligning til neste blir for stort.

Stoffet er basert på standard tekster innen fagfeltet og egen erfaring. Deler av stoffet er nytt på dette undervisningsnivå. Dette gjelder spesielt kapitlene om passivitet og mekaniske resonanser som er relativt avanserte, men som også inneholder mange detaljerte eksempler på praktiske anvendelser. Tilstandsromanalyse er bevisst unngått i teksten med unntak av et appendiks som omhandler stabilitet av lineære systemer. Grunnen til dette er at på dette nivå er frekvensanalysen den viktigste metode for analyse og design av reguleringssystemer.

Som lærebok passer stoffet til et halvt års kurs med to eller fire timer forelesning i uken. I tillegg bør studentene gjennomføre en laboratorieoppgave f.eks. på en likestrømsmotor hvor de kan prøve ut sentrale problemer i praksis. Stoffet er av varierende vanskelighetsgrad. Et redusert kurs bestående av kapittel 1, 3, 4, 9 og 10 vil gi et godt sammensatt kurs av moderat vanskelighetsgrad. De øvrige kapitlene kan leses

uavhengig av hverandre, og man kan inkludere ett eller flere av disse kapitlene i et kurs. Kapitlene 2, 8 og 11 er mer krevende enn de foran nevnte, mens det mest avanserte stoffet er i kapittel 5, 6 og 7. Spesielt kan stoffet om passivitet være vanskelig, men også dette burde være overkommelig for de fleste. Stjernemerket stoff er på et avansert nivå og er ikke nødvendig for å kunne lese det øvrige stoffet.

Jeg vil takke stud.techn. Geir Hovland og dr.ing-studentene Ola-Erik Fjellstad, Erling Aarsand Johannessen, Rakel K. Kanestrøm, Per Johan Nicklasson og Marit J. Paulsen for beregningsarbeide, eksperimentelle resultater, simuleringer, utarbeidelse av figurer og hjelp med korrekturlesing. Jeg vil også takke dr.ing. Ole J. Sjørdalen og dr.ing. Asgeir J. Sørensen som har gitt vesentlige bidrag til boken. Videre vil jeg rette en takk til studentene i faget "Servoteknikk" i -91 og -92 for kommentarer til kompendiet som er forløperen til boken, og til mine kolleger ved Institutt for teknisk kybernetikk for et godt samarbeide og nyttige kommentarer i forbindelse med utarbeidelsen av boken.

Trondheim, juli 1993

Olav Egeland

Innhold

1	Elektriske motorer	1
1.1	Bevegelsesligninger	1
1.2	Elektromagnetisme	1
1.3	Mekanisk kommutering	2
1.4	Elektronisk kommutering	4
1.5	Dynamisk modell	5
1.6	Motor og gir	7
1.7	Overføring fra rotasjon til translasjon	9
1.8	Kraftforsterker	10
1.8.1	Motorens fire kvadranter	10
1.8.2	Kraftforsterkerens fire kvadranter	11
1.8.3	En- og to-kvadrant forsterkere	12
1.8.4	Reverserbar en-kvadrant forsterker	14
1.8.5	Servoforsterker	14
1.8.6	Lineære servoforsterkere	16
1.9	Strømtilbakekobling	16
1.10	Hastighetsstyring	18
1.11	Hastighets servo med posisjonsregulator	21
1.12	Posisjonsservo uten hastighetsmåling	23
1.13	Vippetass	25
2	Dynamisk tilbakekobling	27
2.1	Innledning	27
2.2	Spenningsstyrt likestrømsmotor	27
2.3	Sammenligning med seriekompensasjon	34
2.4	Følsomhet for støy	35
2.5	Strømstyrt likestrømsmotor	37
2.6	Integralvirkning i hastighetssløyfen	40
2.7	Kompensering av forstyrrelser	40
2.8	Metning i ytre sløyfe*	41
2.9	Implementering	42
2.10	Aktuator med dynamisk tilbakekobling	44
3	Hydrauliske servomekanismer	47
3.1	Innledning	47
3.2	Grunnlag i oljehydraulikk	47
3.3	Ventilstyrt hydraulisk motor	48
3.3.1	Modell av motor	48

3.3.2	Servoventiler	50
3.3.3	Ventilstyrt motor	54
3.3.4	Ventilstyrt arbeidssylinder	57
3.4	Pumpestyrt hydraulisk motor	58
3.5	Elektrohydrauliske servomekanismer	60
3.5.1	Forsyningstrykk	60
3.5.2	Virkningsgrad med servoventil	61
3.5.3	Elektrohydraulisk servoventil	61
3.6	Elektrohydraulisk posisjonsservo	62
3.6.1	Transferfunksjoner	62
3.6.2	Posisjonsregulering	63
3.6.3	Varierende treghetsmoment	65
3.6.4	Følgeforhold	66
3.6.5	Følsomhet for lastmoment	67
3.6.6	Lavpassfilter i posisjonsservo	68
3.6.7	Integralvirkning	70
3.6.8	Elektrohydraulisk hastighetsservo	71
3.6.9	Trykktilbakekobling	73
3.7	MATLAB-eksempler	76
4	Rotkurvemethoden	79
4.1	Innledning	79
4.2	Rotkurver	79
4.3	Rotkurvemethoden	82
4.3.1	Punkter hvor $K = 0$	82
4.3.2	Punkter hvor $K = \pm\infty$	83
4.3.3	Antall forgreninger av rotkurvene	83
4.3.4	Symmetri av rotkurvene	84
4.3.5	Asymptoter til rotkurvene	85
4.3.6	Skjæringspunkt for asymptotene	86
4.3.7	Rotkurver på den reelle akse	87
4.3.8	Retning ut fra en pol og inn til et nullpunkt	88
4.3.9	Skjæring mellom rotkurvene og den imaginære akse	90
4.3.10	Krysspunkter	90
4.4	Introduksjon av poler og nullpunkter	94
4.4.1	Introduksjon av poler	95
4.4.2	Introduksjon av nullpunkt	97
4.5	Hastighetsstyring	99
4.6	Posisjonsstyring	102
4.7	MATLAB-eksempel	105
5	Passivitet	107
5.1	Innledning	107
5.2	Definisjoner	107
5.3	Sammenkobling av passive systemer	110
5.4	Lineære systemer	111
5.5	Passivitetsegenskaper for PID-regulatorer	118
5.6	Stabilitet av tilbak koblede passive systemer	119

5.7	Mekaniske ekvivalenter for PD-regulatorer	120
5.8	Aktiv fjæring for biler	122
5.9	Luftputekatamaran	126
5.10	Multivariable lineære systemer	130
5.11	Dynamisk posisjonering	131
5.12	Spredningsfunksjonen	132
5.13	Impedanstillpasning	135
5.14	Spredningsbeskrivelse av tilbakekoblet passivt system	137
5.15	Spredningsmatrisen for en toport	139
5.16	Seri kobling av toporter	140
5.17	Toportbeskrivelse av passive mekaniske systemer	143
5.18	Aktiv stav for vibrasjonsdemping	147
	5.18.1 Dynamisk modell	147
	5.18.2 Passivitetsanalyse	148
	5.18.3 Vibrasjonsdemping	150
5.19	Begrenset reell og positiv reell	151
5.20	Transmisjonslinjer	158
	5.20.1 Dynamisk modell	158
	5.20.2 Transferfunksjoner	160
	5.20.3 Passivitetsanalyse	164
5.21	Trykkregulering i rørledning	164
	5.21.1 Energibetraktning	164
	5.21.2 Dynamisk modell	165
	5.21.3 Transferfunksjon	167
	5.21.4 Energitap i transmisjonslinjen	168
5.22	Telemanipulering med kraftrefleksjon	168
5.23	Streng positiv reell*	171
6	Passivitet for ulineære systemer	175
6.1	Vektorromformulering	175
6.2	Passive operatorer	182
6.3	Passivitet og stabilitet	188
6.4	Passivt system med PID-regulator	192
6.5	Forming av potensiell energi	195
6.6	Passivitet, spredning og stabilitet	197
7	Mekaniske resonanser	205
7.1	Innledning	205
7.2	Motor med last og elastisk gir	205
	7.2.1 Transferfunksjoner	205
	7.2.2 Energibetraktning	208
7.3	Regulatorstruktur	210
	7.3.1 Tilbakekobling fra motorposisjonen	211
	7.3.2 Tilbakekobling fra lastposisjonen	212
	7.3.3 Tilbakekobling fra motor- og lastposisjon	212
	7.3.4 Intern tilbakekobling fra motorhastighet	213
	7.3.5 Simuleringer	213
7.4	Systemer med flere mekaniske resonanser	215

7.4.1	Passivitetsanalyse	215
7.4.2	Modell for system med tre resonanser	216
7.4.3	Regulatorstruktur for system med mange resonanser	218
7.5	To motorer som driver en elastisk last	221
7.6	Mer om energibetraktninger*	223
7.6.1	Motor med ulineær friksjon	223
7.6.2	Robotstyring med PD-regulatorer	225
7.7	Hydraulisk motor med elastisk last	226
7.7.1	Dynamisk modell	226
7.7.2	Passivitetsbetraktning	228
7.8	Distribuert elastisitet i lasten	228
7.8.1	Euler-Bernoulli bjelke*	228
7.8.2	Aktiv demping	232
7.8.3	Motor og Euler-Bernoulli bjelke*	235
7.9	MATLAB-eksempler	239
8	Poler og nullpunkter i høyre halvplan	241
8.1	Innledning	241
8.2	Regulatordesign i Bodediagram	241
8.2.1	Systemer med en pol i høyre halvplan	242
8.2.2	Følge- og avviksforhold	244
8.3	Autopilot for skip uten retningsstabilitet	244
8.4	Pol/nullpunkt-forkorting	246
8.4.1	Reelle poler i venstre halvplan	246
8.4.2	Komplekskonjugerte poler i venstre halvplan	247
8.4.3	Poler på den imaginære akse	248
8.4.4	Poler i høyre halvplan	249
8.4.5	Kommentar*	251
8.5	Nullpunkter i høyre halvplan	251
8.6	Begrensninger på avviksforholdet $N(s)$	253
8.7	Invertert pendel	256
8.7.1	Dynamisk modell	256
8.7.2	Regulator for pendel	258
8.7.3	Styring av vognen	260
8.8	MATLAB-eksempel	262
9	Foroverkobling	263
9.1	Foroverkobling fra referansen	263
9.1.1	Ideell foroverkobling	263
9.1.2	Foroverkobling ved seriekompensasjon	267
9.1.3	Implementering i reguleringsystem	269
9.2	Følging av preprogrammert referanse	270
9.2.1	Kausalitet	271
9.2.2	Tidsforskyvning i et lineært system	272
9.2.3	Tidsforskyvning for førsteordens system	273
9.2.4	Tidsforskyvning for andreordens system	276
9.2.5	Følging av preprogrammert referanse med foroverkobling	277

9.2.6	Følging av preprogrammert referanse ved tidsforskyvning av referanse	278
9.2.7	Servosystem med flere motorer	278
9.3	Referansegenerering	279
9.3.1	Innledning	279
9.3.2	Stykkevis konstant akselerasjon	280
9.3.3	Optimalisering av hastighetsprofil	281
9.3.4	Filtrering av referansen	283
9.4	MATLAB-eksempel	284
10	Implementeringsaspekter	285
10.1	Spesifikasjoner	285
10.2	Type system	289
10.3	Integralvirkning i servosystemer	291
10.4	Metning og integralvirkning	294
10.5	PID-regulatorer i analog elektronikk	296
10.6	PD1 og PD2	299
10.7	Frekvensbegrenset derivasjon	301
10.7.1	Derivasjon med førsteordens filter	302
10.7.2	Derivasjon med andreordens filter	303
10.7.3	Derivasjon med tredjeordens filter	304
10.8	Filtrering av målesignaler	305
10.8.1	Innledning	305
10.8.2	Klassiske lavpassfiltre	306
10.8.3	Sugefilter	307
10.9	Modellbasert filtrering	309
10.9.1	Innledning	309
10.9.2	Filter	311
10.9.3	Analyse av filter	311
10.9.4	Realisering ved bruk av fysisk modell	313
10.9.5	Konsekvenser ved bruk i tilbakekobling	313
10.9.6	Eksempel fra dynamisk posisjonering	314
11	Algoritmer i diskret tid	317
11.1	Simulering	317
11.1.1	Eulers metode	317
11.1.2	Eulers metode for andreordens systemer	319
11.1.3	Trapesmetoden	322
11.1.4	Fjerdeordens Runge-Kutta metode	326
11.1.5	Konklusjon	327
11.2	Regulatoralgoritmer	328
11.2.1	Innledning	328
11.2.2	Diskretisering av transferfunksjoner	328
11.2.3	Tastefrekvens	332
11.3	Digitale regulatorer	332
11.3.1	Programvare	332
11.3.2	Programstruktur	333
11.3.3	Digitale prosessorer	334

A Stabilitet av lineære systemer	335
A.1 BIBO-stabilitet	335
A.2 Stabilitet med null pådrag	337

Kapittel 1

Elektriske motorer

1.1 Bevegelsesligninger

I en rotasjonsmotor settes det opp et motormoment $T(t)$ som driver motoren. Momentet oppgis i Nm. Motorens vinkelhastighet betegnes $\omega_m(t)$. Vinkelhastighet angis i rad/s eller omdr/min hvor

$$1 \frac{\text{omdr}}{\text{min}} = \frac{2\pi \text{ rad}}{60 \text{ s}} = 0.105 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Den mekaniske effekten som motoren leverer er

$$P_m = T\omega_m \quad (1.1)$$

Dette er rotasjonsutgaven av kraft multiplisert med hastighet, som er effekten ved lineær bevegelse. Effekt angis i W = Nm/s.

Bevegelsesligningen for motorakslingen finnes av spinnsatsen som er en momentbalanse:

$$J_m \dot{\omega}_m = T - T_L \quad (1.2)$$

hvor J_m er motorakslingens treghetsmoment som angis i kg m², og T_L er lastmomentet som virker på motorakslingen fra lasten motoren driver. Denne bevegelsesligningen gjelder for alle typer rotasjonsmotorer. Forskjellen mellom elektriske motorer, hydrauliske motorer og forbrenningsmotorer er måten motormomentet T genereres på.

1.2 Elektromagnetisme

I dette kapitlet behandles noen sentrale resultater fra elektromagnetisk teori.

Den magnetiske feltstyrken \mathbf{H} satt opp av strømmen I gjennom en leder er slik at omløpsintegralet av \mathbf{H} er lik strømmen som omslutes av integrasjonsveien, dvs

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = NI \quad (1.3)$$

hvor N er antall vindinger av strømlederen, og \cdot betegner skalarprodukt. Den magnetiske flukstettheten \mathbf{B} er gitt av

$$\mathbf{B} = \mu\mathbf{H} \quad (1.4)$$

hvor μ er permeabiliteten, som er en materialkonstant. Den magnetiske fluksen ϕ gjennom et areal A er gitt av

$$\phi = \int_A \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dA \quad (1.5)$$

hvor \mathbf{n} er enhets normalvektoren til flaten A , og dA er flateelementet. Feltet \mathbf{B} er divergensfritt, dvs.

$$\int_V \operatorname{div} \mathbf{B} dV = \oint_{\delta V} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dA = 0 \quad (1.6)$$

hvor V er et volum, dV er et volumelement, δV er overflaten av volumet og \mathbf{n} er ytre enhetsnormal.

En strømløder med N vindinger som omslutter en magnetisk fluks ϕ får i følge Faradays lov en induert spenning

$$e = N \frac{d\phi}{dt} \quad (1.7)$$

Kraften som virker på en elektrisk leder i et magnetfelt er gitt av Lorentz kraftlov. For en partikkel lyder den

$$\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (1.8)$$

hvor \mathbf{F} er kraften som virker på partikkelen, q er partikkelens ladning og \mathbf{v} dens hastighet i feltet \mathbf{B} . For en leder med strøm I blir kraften pr. lengdeenhet

$$\mathbf{f} = \mathbf{I} \times \mathbf{B} \quad (1.9)$$

hvor \mathbf{I} er en vektor med absoluttverdi lik strømmen I og samme retning som strømmen. Dette betyr at med et gitt felt \mathbf{B} og en strømstyrke I oppnås maksimal kraft hvis lederen er vinkelrett på feltet.

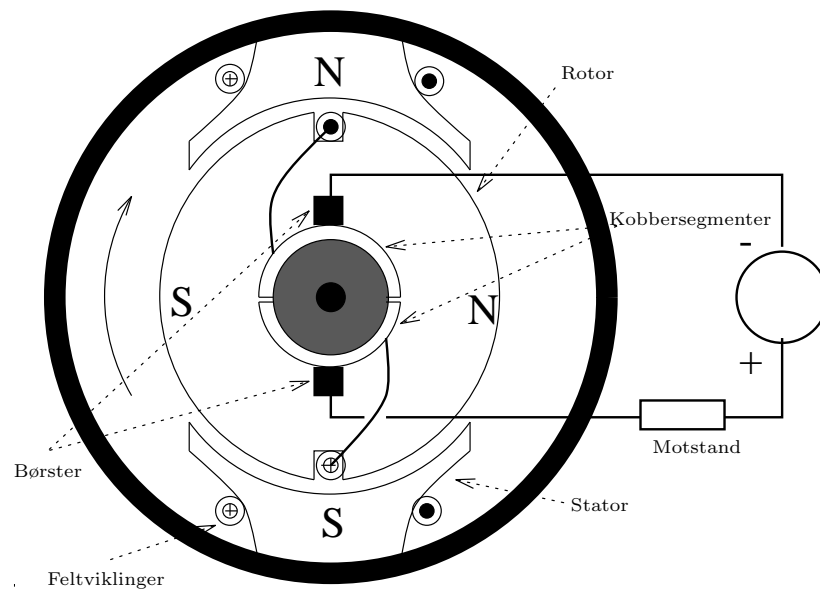
1.3 Mekanisk kommutering

En elektrisk motor har en **stator** som er en del av motorhuset, og en **rotor** som er den roterende del av motoren. Ved å sette opp et magnetisk felt i stator, kan et motormoment genereres ved å føre en strøm gjennom en leder i rotor.

I en tradisjonell likestrømsmotor settes det opp et konstant magnetfelt \mathbf{B}_f i stator ved å føre **feltstrømmen** i_f gjennom feltviklingene som ligger fast i stator. Et dreiemoment oppnås ved å føre **ankerstrømmen** i_a gjennom ankerviklingene som ligger fast i rotor. For å bibeholde dreiemomentet når rotor dreier, skiftes strømretningen i ankervindingene slik at kraft pr. lengdeenhet

$$\mathbf{f} = \mathbf{i}_a \times \mathbf{B}_f \quad (1.10)$$

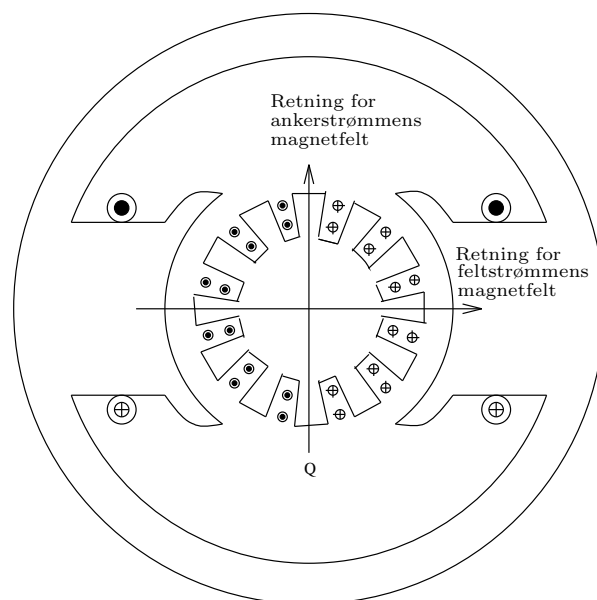
fra en leder i ankervindingene alltid gir dreiemoment i riktig retning. Her er \mathbf{i}_a en vektor med absoluttverdi i_a og retning langs ankerstrømløderen. Denne skifting av strømretning betegnes **kommuttering**. Kommutteringen skjer ved bruk av slepekontakter. En sylinder av kobbersegmenter er montert på rotor. Kobbersegmentene er isolert fra hverandre og fra rotor med f.eks. bakelitt eller plast. Stasjonære **børster** av karbon er montert på stator, og ankerstrømmen ledes gjennom børstene og kobbersegmentene til ankerviklingene. Børstene og kobbersegmentene er montert slik at lederne



Figur 1.1: *Elementær likestrømsmotor med slepekontakter for kommutering.*

i ankerviklingene får en strøm som gir en kraft i riktig retning. Dette er illustrert i figur 1.1.

Feltstrømmen setter opp et magnetfelt i stator. Tilsvarende setter ankerstrømmen opp et magnetfelt i rotor. En enkel forklaring på at det oppstår et dreiemoment i motoren får man ved å studere samspillet mellom de to magnetfeltene. Motoren i figur 1.2 har to poler i rotor og to poler i stator. En pol hvor magnetfluksen går inn i metallet betegnes en **magnetisk sydpol**, mens en pol hvor fluksen går ut av metallet er en **magnetisk nordpol**.



Figur 1.2: *Magnetfelt i en to-polet likestrømsmotor.*

Det oppstår et dreiemoment mellom de to magnetene som søker å få flukslinjene i de to magnetene til å falle sammen. Dette betyr at nordpol i rotor vil tiltrekkes av sydpol i stator, mens sydpol i rotor vil tiltrekkes av nordpol i stator. Legg merke til

at de to magnetfeltene er rotert 90° i forhold til hverandre. Dette gir det maksimale dreiemomentet mellom de to feltene.

Det spesielle med en likestrømsmotor er at stator- og rotorfeltet alltid står vinkelrett på hverandre slik at maksimalt dreiemoment opprettholdes. Dette oppnås ved kommuteringen. Når en leder i rotor passerer linjen Q i figur 1.2, endres strømretningen ved at børstene kommer i kontakt med andre kobbersegmenter, og magnetfeltet i rotor har derfor konstant retning relativt til stator.

Ut fra den foregående diskusjonen er det klart at dreiemomentet i en likestrømsmotor er proporsjonalt med ankerstrømmen i_a og magnetfluksen ϕ_f som er proporsjonal med feltstrømmen i_f . Motormomentet kan derfor skrives

$$T = K_a \phi_f i_a = k_f i_f i_a \quad (1.11)$$

hvor K_a og k_f er konstanter. Hvis feltstrømmen er konstant, er momentet gitt av

$$T = K_T i_a \quad (1.12)$$

hvor K_T er motorens momentkonstant. I servoteknikken er dette den sentrale egenskapen til likestrømsmotoren: **En likestrømsmotor kan levere et spesifisert motormoment.**

1.4 Elektronisk kommutering

En nyere type likestrømsmotor er **den elektronisk kommuterte** eller **børsteløse likestrømsmotor**. Denne type motor har samme mekaniske konstruksjon som en **synkronmotor** som er en vekselstrømsmotor, men med kommuteringselektronikken har den den samme dynamiske modell som en likestrømsmotor. Også **steppermotorer** med **permanentmagnet rotor** eller av typen **variabel reluktans** kan gå som en børsteløs likestrømsmotor ved å bruke en spesiell variant av mikrostepping. I litteraturen blir elektronisk kommuterte likestrømsmotorer betegnet både som synkron- eller vekselstrømsmotor og som likestrømsmotor. I servoteknisk sammenheng er man imidlertid først og fremst interessert i den dynamiske modellen til motoren, og dette er bakgrunnen for en ny definisjon:

En likestrømsmotor er en elektrisk motor som kan levere et spesifisert motormoment.

I en elektronisk kommutert likestrømsmotor settes feltet opp av en **permanentmagnet i rotor**. I motsetning til en likestrømsmotor med mekanisk kommutering vil feltet rotere med rotor i denne motoren. Dette betyr at feltet i stator må rotere med samme hastighet som rotor for å opprettholde en vinkel på 90° mellom stator- og rotorfelt. Statorfeltet roteres ved hjelp av den elektroniske kommuteringen som benytter måling av rotorens vinkel for å orientere statorfeltet.

Det oppnåelige dreiemomentet i en elektronisk kommutert motor med permanentmagnet i rotor er proporsjonal med den magnetiske fluksen til permanentmagneten og ankerstrømmen i statorviklingene. For å få kraftige permanentmagneter har man brukt sjeldne jordmetaller, og det beste for øyeblikket er samarium-kobolt (SmCo_5) magneter. Disse magnetene er 3–10 ganger sterkere enn de mer vanlige ferritt og AlNiCo magneter.

Elektronisk kommuterte likestrømsmotorer brukes i krevende anvendelser som i robotarmer og for inn-ut utstyr for datasystemer. De har den fordelene fremfor mekanisk kommuterte motorer at vedlikehold pga. slitasje av børstene unngås. Kullstøv og gnister fra børstene elimineres, og dette er viktig i rene rom og i eksplosjonsfarlige omgivelser.

1.5 Dynamisk modell

I en mekanisk kommutert likestrømsmotor er magnetfeltet i stator satt opp av en permanentmagnet eller av feltstrømmen i_f . Det antas i det følgende at en permanentmagnet eller en konstant feltstrøm benyttes slik at feltfluksen ϕ_f er konstant. Motormomentet er da

$$T = K_T i_a \quad (1.13)$$

hvor

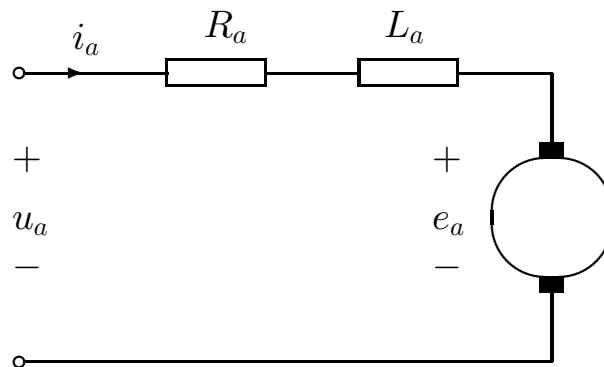
$$\begin{aligned} K_T &= \text{Motorens momentkonstant} \\ i_a &= \text{Ankerstrømmen} \end{aligned}$$

Ankerkretsen (figur 1.3) roterer i feltet fra stator, og en induisert spenning

$$e_a = K_E \omega_m \quad (1.14)$$

oppstår over motoren i overensstemmelse med Faradays lov. Her er

$$\begin{aligned} K_E &= \text{Motorens spenningskonstant} \\ \omega_m &= \text{Vinkelhastighet} \end{aligned}$$



Figur 1.3: Ankerkrets for mekanisk kommutert likestrømsmotor.

Momentkonstanten K_T er lik spenningskonstanten K_E . Dette vises ved effektbeaktning: Elektrisk effekt tilført motoren er

$$P_e = e_a i_a = K_E \omega_m i_a \quad (1.15)$$

mens den mekaniske effekten levert av motoren er

$$P_m = \omega_m T = \omega_m K_T i_a \quad (1.16)$$

Under stasjonært forløp er

$$P_e = P_m \Rightarrow K_T = K_E \quad (1.17)$$

Kirchhoffs spenningslov for ankerkretsen gir

$$u_a = R_a i_a + L_a \frac{d}{dt} i_a + e_a \quad (1.18)$$

hvor u_a er ankerspenningen som er motorens pådrag, R_a er ankermotstanden og L_a er ankerinduktansen. Momentbalansen for rotor gir

$$J_m \dot{\omega}_m = T - T_L \quad (1.19)$$

hvor J_m er motorens treghetsmoment, og T_L er momentet som virker på motoren fra lasten.

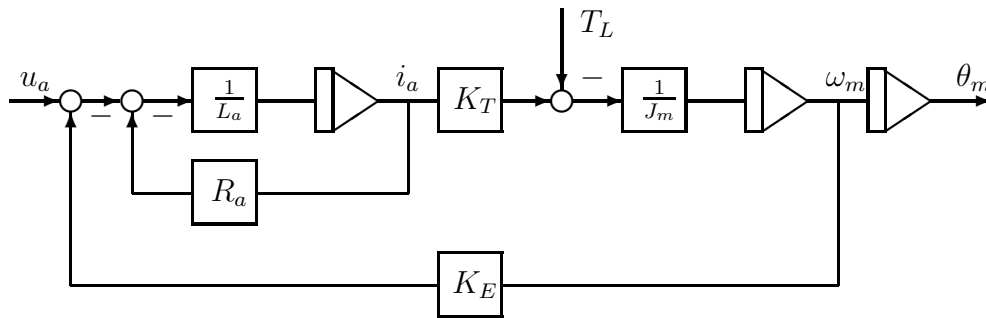
Ved å sette inn for e_a og T fås modellen

$$L_a \frac{d}{dt} i_a = -R_a i_a - K_E \omega_m + u_a \quad (1.20)$$

$$J_m \dot{\omega}_m = K_T i_a - T_L \quad (1.21)$$

$$\dot{\theta}_m = \omega_m \quad (1.22)$$

hvor θ_m er motorvinkelen. Blokkdiagrammet er vist i figur 1.4.



Figur 1.4: Blokkdiagram for spenningsstyrt likestrømsmotor.

Laplacetransformasjon gir

$$\theta_m(s) = \frac{\frac{1}{K_E} u_a(s) - \frac{R_a}{K_E K_T} (1 + \frac{L_a}{R_a} s) T_L(s)}{s (\frac{J_m L_a}{K_E K_T} s^2 + \frac{J_m R_a}{K_E K_T} s + 1)} \quad (1.23)$$

som kan skrives

$$\theta_m(s) = \frac{\frac{1}{K_E} u_a(s) - \frac{R_a}{K_T K_E} (1 + T_a s) T_L(s)}{s (T_a T_m s^2 + T_m s + 1)} \quad (1.24)$$

hvor

$$T_a = \frac{L_a}{R_a} \quad (1.25)$$

er motorens elektriske tidskonstant, og

$$T_m = \frac{J_m R_a}{K_E K_T} \quad (1.26)$$

er motorens mekaniske tidskonstant. Vanligvis er

$$T_a \ll T_m \Rightarrow T_m + T_a \approx T_m \quad (1.27)$$

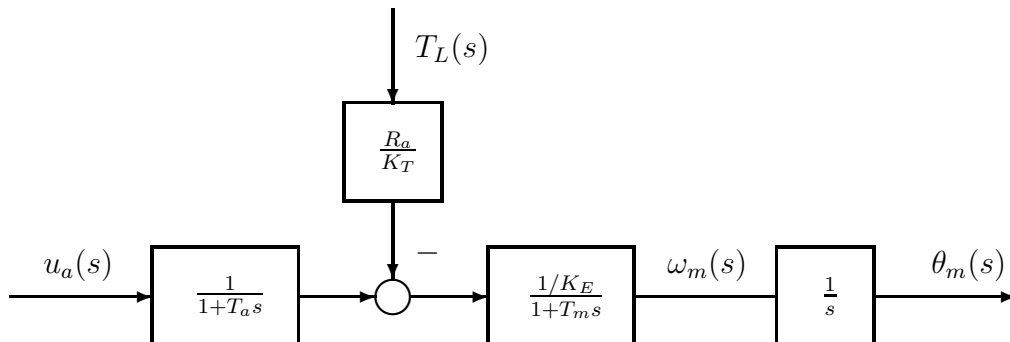
slik at modellen kan skrives

$$\theta_m(s) = \frac{\frac{1}{K_E} u_a(s)}{s(1 + T_m s)(1 + T_a s)} - \frac{\frac{R_a}{K_E K_T} T_L(s)}{s(1 + T_m s)} \quad (1.28)$$

Transferfunksjonen fra pådraget u_a til θ_m er

$$h_p(s) = \frac{\theta_m(s)}{u_a(s)} = \frac{\frac{1}{K_E}}{s(1 + T_m s)(1 + T_a s)} \quad (1.29)$$

som består av en integrator representert ved en s i nevneren og to tidskonstanter representert ved $(1 + T_a s)$ og $(1 + T_m s)$ i nevneren. Blokkdiagram basert på tidskonstantene er vist i figur 1.5.



Figur 1.5: Blokkdiagram for spenningsstyrt likestrømsmotor som viser mekanisk og elektrisk tidskonstant.

1.6 Motor og gir

En likestrømsmotor har vanligvis et turtallsområde fra null til omlag 5000 omdreininger i minuttet. I de fleste anvendelser har man en lavere maksimal omdreiningshastighet, og man bruker et reduksjonsgir for å få lavere hastighet på utgangen.

Et reduksjonsgir er beskrevet ved

$$\omega_u = n\omega_i \quad (1.30)$$

hvor ω_i er vinkelhastighet inn på giret, ω_u er vinkelhastighet ut av giret og n er girutvekslingen. For et reduksjonsgir er $n < 1$.

Sammenhengen mellom moment inn T_i og moment ut T_u finnes ved en effektbeaktning. Anta at giret er tapsfritt. Da er effekt inn på giret lik effekt ut av giret:

$$T_i\omega_i = T_u\omega_u \quad (1.31)$$

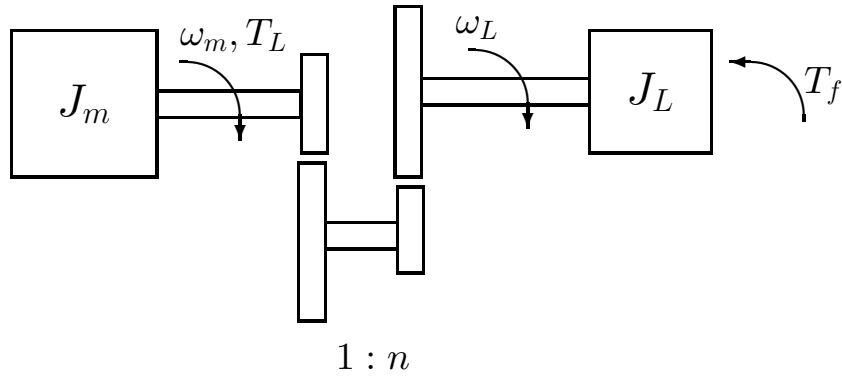
Innsetting av lign. (1.30) gir

$$T_u = \frac{1}{n}T_i \quad (1.32)$$

Et reduksjonsgir reduserer altså hastigheten med en faktor n og forsterker motormomentet med en faktor $1/n$.

Vi skal nå undersøke hvordan giroversetningen opptrer i bevegelsesligningen. Anta at en likestrømsmotor har momentbalansen

$$J_m\dot{\omega}_m = T - T_L \quad (1.33)$$



Figur 1.6: Motor forbundet med last over et reduksjonsgir med utveksling n .

og at lasten er et treghetsmoment J_L som drives over et gir med girutveksling n . Systemet er vist i figur 1.6.

Lasten har vinkelhastighet

$$\omega_L = n\omega_m \quad (1.34)$$

Momentbalansen for lasten er

$$J_L\dot{\omega}_L = \frac{1}{n}T_L - T_f \quad (1.35)$$

hvor T_f er forstyrrelsesmomentet som virker på lasten. Dette kan skrives

$$J_L n\dot{\omega}_m = \frac{1}{n}T_L - T_f \quad (1.36)$$

Innsetting i momentbalansen for motoren (lign. 1.33) gir

$$(J_m + n^2 J_L)\dot{\omega}_m = T - nT_f \quad (1.37)$$

som er momentbalansen referert til motorsiden.

Dette betyr at:

- Et treghetsmoment på lastside kan refereres til motorsiden ved å multiplisere med kvadratet av girutvekslingen.
- Et moment på lastside kan refereres til motorsiden ved å multiplisere med girutvekslingen.

Alternativt kan man formulere modellen på lavhastighetssiden:

$$\left(\frac{1}{n^2}J_m + J_L\right)\dot{\omega}_L = \frac{1}{n}T - T_f \quad (1.38)$$

For gitt J_m , J_L og T og med $T_f = 0$ gir et girforhold

$$n = \sqrt{\frac{J_m}{J_L}} \quad (1.39)$$

maksimal akselerasjon $\dot{\omega}_L$ [3]. Dette gir

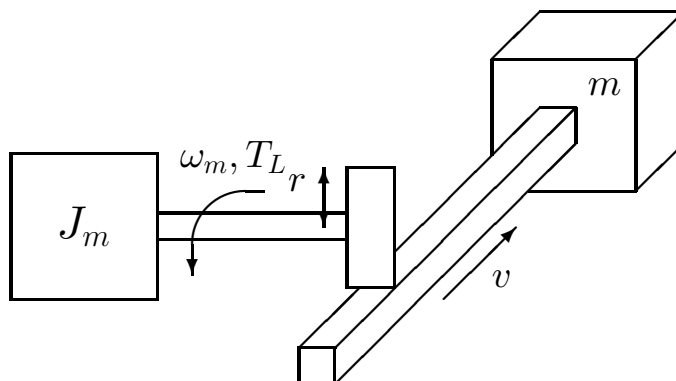
$$J_m = n^2 J_L \quad (1.40)$$

som er en mye brukt designregel for å velge n .

1.7 Overføring fra rotasjon til translasjon

Rotasjonsbevegelse kan overføres til translasjonsbevegelse med et hjul på motorakslingen som ruller mot en overflate. Denne type overføring finnes i tannstangoverføringer, friksjonsgir og mellom hjul og vei for kjøretøyer.

Vi skal studere en motor som driver en last med translasjonsbevegelse over et hjul med radius r . Systemet er vist i figur 1.7.



Figur 1.7: Motor med overføring fra rotasjon til translasjon.

Motorakslingen har vinkelhastighet ω_m . Lineærhastigheten er da

$$v = r\omega_m \quad (1.41)$$

En tangentiell kraft F i kontaktpunktet gir et moment

$$T_L = Fr \quad (1.42)$$

om motorakslingen. Effekten på rotasjonssiden er $T_L\omega_m$, mens på translasjonssiden er effekten Fv . Av lign. (1.41) og (1.42) fremgår det at rotasjonseffekt inn er lik translasjonseffekt ut.

Anta at lasten har bevegelsesligning

$$m\dot{v} = F - F_f \quad (1.43)$$

hvor m er massen av lasten, F er kraften fra overføringen og F_f er en forstyrrende kraft. En likestrømsmotor driver hjulet, og er beskrevet ved

$$J_m\dot{\omega}_m = T - T_L \quad (1.44)$$

hvor T er motormomentet. Ut fra disse ligningene finner man at motor og last har bevegelsesligningen

$$(J_m + mr^2)\dot{\omega}_m = T - rF_f \quad (1.45)$$

Ligningen kan overføres til lineærsiden, hvor den skrives

$$\left(\frac{1}{r^2}J_m + m\right)\dot{v} = \frac{1}{r}T - F_f \quad (1.46)$$

For en gitt J_m , m og T og med $F_f = 0$ vil maksimal akselerasjon \dot{v} av lasten oppnås for en r som gir

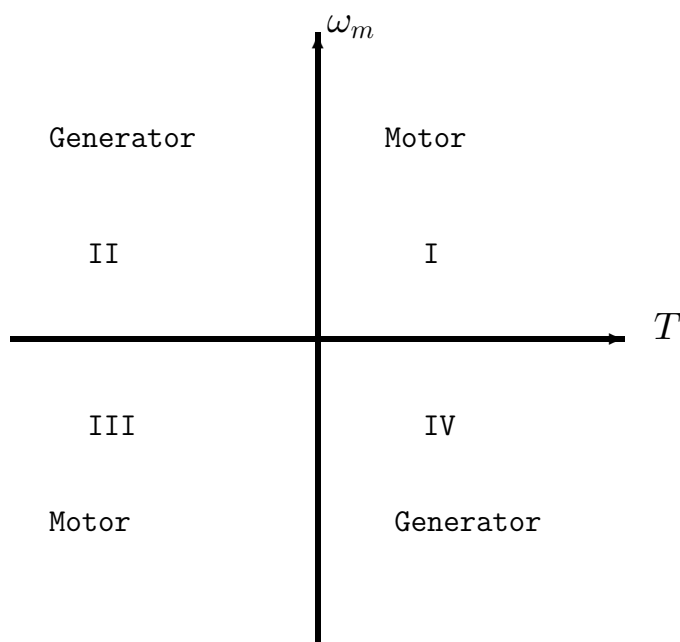
$$J_m = mr^2 \quad (1.47)$$

1.8 Kraftforsterker

I dette kapitlet gis en kort innføring i kraftforsterkere for likestrømsmotorer. Denne problemstillingen er gitt en fullstendig behandling i [25], og en del praktiske detaljer er beskrevet i [32].

1.8.1 Motorens fire kvadranter

En likestrømsmotor leverer en mekanisk effekt $T\omega_m$ hvor T er motormomentet og ω_m er motorens vinkelhastighet. Hvis T og ω_m har samme fortegn, leverer motoren en positiv effekt. Motoren omformer i så fall elektrisk effekt til mekanisk effekt og fungerer som en motor. Hvis T og ω_m har motsatt fortegn, fungerer motoren som en generator som omformer mekanisk effekt til elektrisk effekt. Dette beskrives i moment-hastighetsdiagrammet som er vist i figur 1.8. Kvadrant I og III er motorkvadranter,



Figur 1.8: Motorens fire kvadranter.

mens kvadrant II og IV er generatorkvadranter hvor momentet bremser motoren.

I en rekke anvendelser skal en elektrisk motor alltid ha hastighet i positiv retning. Typiske eksempler på dette er viftemotorer og motorer som driver båndopptagere.

Eksempel 1.1 En viftemotor i et ventilasjonssystem roterer alltid i samme retning unntatt for spesielle viftetyper. Det er stor friksjon og luftmotstand, og kravene til nøyaktighet er moderate. Det er derfor ikke nødvendig å bremse med motormomentet, og det er tilstrekkelig med en en-kvadrantstyring. For denne type anvendelser er det forøvrig vanlig å bruke asynkronmotorer. ■

Eksempel 1.2 En motor som skal drive en CD-plate må rotere med nøyaktig hastighet, og dette betinger at motoren som driver CD-platen må kunne både akselerere og

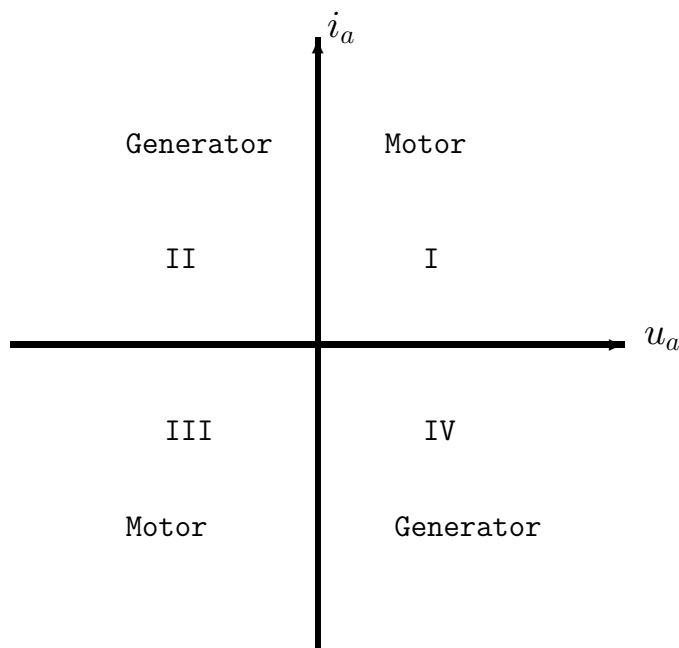
bremse platen. Hastigheten har imidlertid alltid samme retning. Dette er en typisk to-kvadrantstyring hvor kvadrant I og II i $T\omega_m$ diagrammet brukes. ■

En servomotor må kunne ha hastighet i begge retninger og i tillegg kunne ha både positivt og negativt motormoment. I et hastighet-momentdiagram må altså motoren kunne rotere i alle fire kvadranter. Dette kalles fire-kvadrantstyring.

Eksempel 1.3 En motor som driver et ledd i en robotarm må kunne rotere i begge retninger, og i tillegg både akselerere og bremse for å følge en spesifisert referanse. For denne anvendelsen kreves en fire-kvadrant styring. ■

1.8.2 Kraftforsterkerens fire kvadranter

En kraftforsterker leverer en elektrisk effekt $u_a i_a$ til likestrømsmotoren hvor u_a er anker-spenning og i_a er ankerstrøm. Hvis u_a og i_a har samme fortegn, leverer forsterkeren elektrisk effekt til motoren, mens med motsatt fortegn på u_a og i_a er det motoren som leverer elektrisk effekt til forsterkeren. Kraftforsterkeren beskrives i et spenning-strømdiagram som vist i figur 1.9. I kvadrant I og III leverer forsterkeren effekt, mens i kvadrant II og IV absorberer den effekt fra motoren.

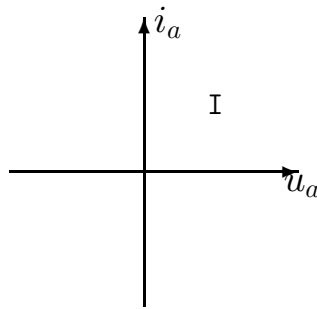


Figur 1.9: Kraftforsterkerens fire kvadranter.

Det er en nær sammenheng mellom motorens $T\omega_m$ -diagram og forsterkerens $u_a i_a$ -diagram.

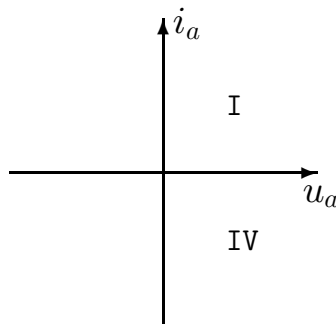
Anta at en likestrømsmotor drives av en forsterker som bare opererer i kvadrant I i $u_a i_a$ -planet (figur 1.10). I så fall kan motoren bare være i kvadrant I i $T\omega_m$ -planet under stasjonære forhold. Dette er klart siden momentet T er proporsjonalt med strømmen i_a , og siden forsterkeren leverer positiv effekt i kvadrant I må effektflyten i motoren gå fra

elektrisk effekt til mekanisk effekt hvilket vil si at motoren er i kvadrant I i $T\omega_m$ -planet.



Figur 1.10: *En-kvadrantforsterkerens spenning-strømdiagram. Forsterkeren kan bare ha positiv strøm og spenning ut.*

Anta så at forsterkeren er en to-kvadrant forsterker som kan levere positiv og negativ strøm, med bare positiv spenning (figur 1.11). Motoren kan i så fall ha positivt og negativt moment siden $T = K_T i_a$, men stasjonært kan den bare ha positiv hastighet hvilket sees av effektflyten. Forsterkeren er altså i kvadrant I eller IV i $u_a i_a$ -diagrammet, mens motoren er i kvadrant I eller II i $T\omega_m$ -diagrammet.



Figur 1.11: *To-kvadrantforsterkerens spenning-strømdiagram. Forsterkeren kan bare ha positiv spenning ut, mens strømmen kan være både positiv og negativ.*

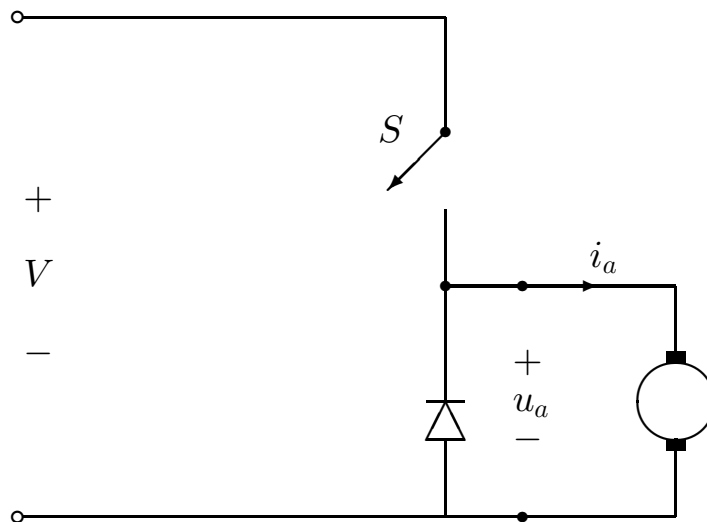
En fire-kvadrant forsterker er nødvendig for en servomotor som skal kunne rotere begge veier og i tillegg kunne ha positivt og negativt moment.

1.8.3 En- og to-kvadrant forsterkere

Hvis motorens hastighet alltid har samme retning kan en en- eller to-kvadrant forsterker brukes. Motorstyringer basert på denne type forsterker betegnes gjerne som hastighetsstyringer (*adjustable-speed drives*). Det er ikke vanlig å betegne denne type kraftforsterker for en servoforsterker, og tilsvarende betegnes vanligvis ikke motoren som en servomotor når denne type kraftforsterker brukes.

For en- og to-kvadrant styringer benyttes vanligvis kraftforsterkere basert på chopperomformere som er rimeligere enn servoforsterkere.

En typisk en-kvadrant forsterker er vist i figur 1.12. Dette er en enkel chopper som reduserer inngangsspenningen V til en ønsket utgangsspenning u_a med samme fortegn ved hjelp av bryteren eller svitsjen S . Det antas at bryteren er ideell hvilket vil si at



Figur 1.12: En-kvadrant forsterker realisert med chopper-krets.

hvis den er på, så er det null spenning over bryteren, og den kan lede strøm i positiv retning som markert av pilen. Når bryteren er av, så er strømmen gjennom den lik null.

Bryteren realiseres med en transistor av typen BJT, IGBT eller MOSFET eller en tyristor av typen GTO (*gate-turn-off-thyristor*). Bryteren slås av og på med svitsjefrekvensen som er mye større enn motorens båndbredde. Typiske svitsjefrekvenser er over 20 kHz. Under denne frekvensen vil svitsjingen gi hørbar støy som kan være generende.

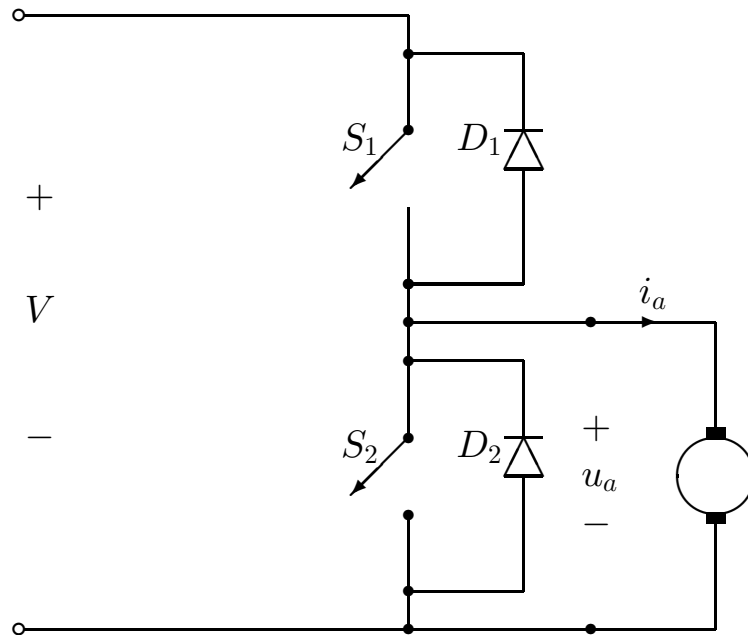
Anta at svitsjefrekvensen er konstant med periode τ_s , og at bryteren er på en periode τ_A i hver svitsjeperiode hvor $\tau_A \leq \tau_s$. Med en positiv spenning V inn på chopperen gir dette en gjennomsnittlig spenning ut på $\bar{u}_a = V\tau_A/\tau_s \leq V$ hvor \bar{u}_a er positiv. Den høye svitsjefrekvensen og motorens lavpasskarakter gjør at spenningen ut virker som gjennomsnittsspenningen med en liten ripple.

Et eksempel på en to-kvadrant forsterker er vist i fig.1.13. Dette er en halv brokobling som kan levere positiv spenning og strøm i begge retninger. Koblingen har to brytere S_1 og S_2 i antiparallell med diodene D_1 og D_2 . Bryterne kan aldri være på samtidig, siden dette gir kortslutning av forsyningsspenningen V over bryterne som fører til at bryterne brenner opp. Her antas det at S_1 er på når S_2 er av og omvendt. I praksis må det være et kort intervall hvor begge bryterne er avslått pga. dynamikken i bryterne. Dette intervallet betegnes blanketiden.

Når S_1 er på, er $u_a = V$, mens når S_2 er på, så er $u_a = 0$. Når svitsjefrekvensen er høy, blir gjennomsnittlig spenning ut lik $\bar{u}_a = V\tau_1/\tau_s$ hvor τ_1 er intervallet S_1 er på og τ_s er svitsjeperioden. Dette betyr at spenningen inn på motoren er positiv: $0 \leq \bar{u}_a \leq V$.

Strømmen i_a kan gå begge veier. Hvis S_1 er på og S_2 av, går positiv strøm gjennom S_1 , mens negativ strøm går gjennom dioden D_1 . Hvis S_2 er på og S_1 av, går positiv strøm gjennom dioden D_2 , mens negativ strøm går gjennom S_2 . Hvis både S_1 og S_2 er av, går positiv strøm gjennom D_2 og negativ strøm gjennom D_1 . (Pga. induktansen i motoren må strømmen i_a være kontinuerlig.)

Forsterkeren er altså to-kvadrant siden spenningen er større eller lik null, mens strømmen kan gå begge veier.



Figur 1.13: To-kvadrant forsterker realisert med halv brokobling.

1.8.4 Reverserbar en-kvadrant forsterker

Ved å bruke en en-kvadrant forsterker med et relé som kobler om utgangsterminalene, kan en reverserbar en-kvadrant styring realiseres som vist i figur 1.14. Forsterkeren kan operere i kvadrant I og III, og kan ikke trekke effekt ut av systemet. Det er derfor vanlig å ha en mellomstilling B på reléet som gir effektutlading i motstanden R_B og dermed bremsing av motoren.

Det er ikke hensiktsmessig å bruke denne type forsterker i servosystemer. I et servosystem vil strøm og spenning skifte fortegn så ofte at reléet kan slites ut. Viktigere er det imidlertid at i et servosystem må alle fire kvadranter kunne brukes.

Dette er ikke mulig for denne type forsterker hvilket vises i det følgende: Anta at motoren roterer med vinkelhastigheten ω_m . Ser man bort fra ankerinduktansen er

$$u_a = K_E \omega_m + R_a i_a \quad (1.48)$$

Hvis $\omega_m > 0$, så er

$$i_a = \begin{cases} 0 & \text{når } 0 < u_a < K_E \omega_m \\ \frac{u_a - K_E \omega_m}{R_a} & \text{ellers} \end{cases} \quad (1.49)$$

Hvis man forsøker å bruke denne forsterkeren til strømstyring, oppstår det et dødbånd avhengig av motorens vinkelhastighet.

1.8.5 Servoforsterker

En fire-kvadrant styring realiseres med en full brokobling, som også betegnes som en H-bro. Brokoblingen er vist i figur 1.15.

I denne brokoblingen er det fire svitsjer S_{A+} , S_{A-} , S_{B+} og S_{B-} . I antiparallell med hver svitsj står en diode. De to A -svitsjene er aldri på samtidig siden dette gir kortslutning av forsyningsspenningen, som fører til at svitsjene brenner opp. Tilsvarende

Figur 1.14: Reverserbar en-kvadrant forsterker

kan ikke de to B -svitsjene lede samtidig. For å være sikker på at kortslutning ikke skal oppstå, må det være et kort opphold, som betegnes blanketiden, etter at S_{A+} er slått av før S_{A-} kan slås på. Tilsvarende gjelder for B -svitsjene. Dette gir et dødbånd i servoforsterkeren.

Spenningen i punktet A lik $v_A = V$ når S_{A+} er på og S_{A-} er av, mens $v_A = 0$ når S_{A+} er av og S_{A-} er på. Gjennomsnittlig spenning i punktet A er derfor $\bar{v}_A = V\tau_A/\tau_s$ hvor τ_A er intervallet hvor S_{A+} er på, og τ_s er svitsjeperioden. Tilsvarende blir den gjennomsnittlige spenningen i B lik $\bar{v}_B = V\tau_B/\tau_s$ hvor τ_B er intervallet når S_{B+} er på. Gjennomsnittlig spenning ut blir

$$\bar{u}_a = \bar{v}_A - \bar{v}_B \quad (1.50)$$

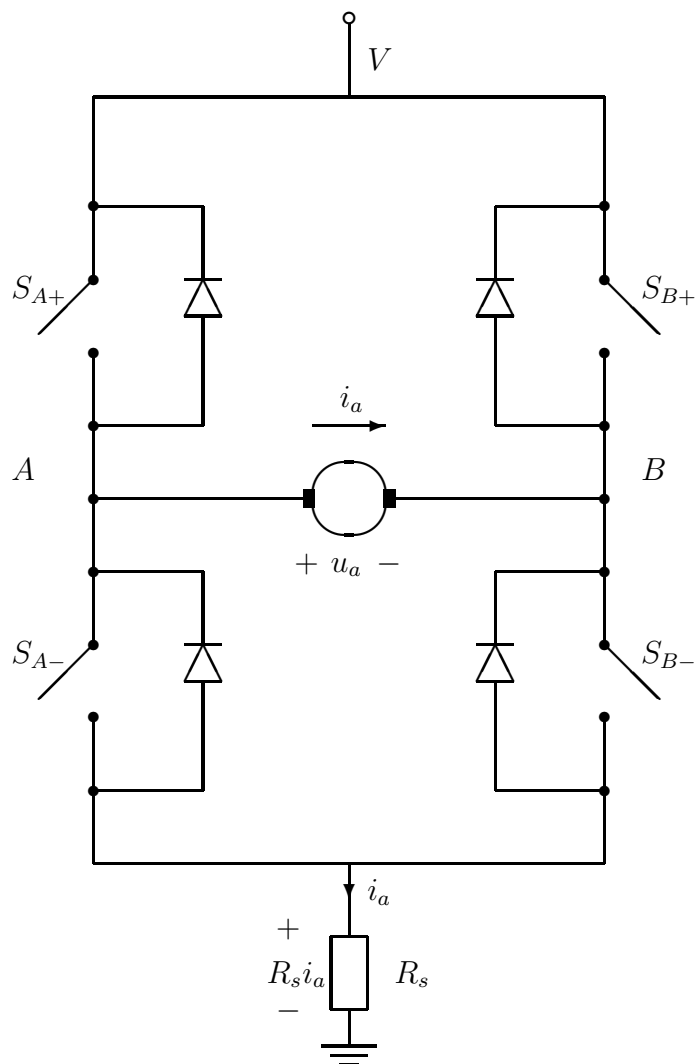
hvor $0 < \bar{v}_A < V$ og $0 < \bar{v}_B < V$. Dette betyr at utgangsspenningen \bar{u}_a kan variere fra $-V$ til $+V$.

På samme måte som for en halv brokobling kan strømmen være både positiv og negativ. En full brokobling kan altså levere strøm og spenning i alle fire kvadranter.

En mulig svitsjestrategi er å la S_{A+} og S_{B-} være på eller av samtidig, og tilsvarende la S_{A-} og S_{B+} være på eller av samtidig.

Dødbåndet i servoforsterkeren som skyldes blanketiden bør elimineres ved bruk i et servosystem. Dette gjøres vanligvis ved bruk av strømtilbakekobling. Legg merke til at motorens potensiale flyter i forhold til forsterkeren ved bruk av full brokobling. Dette må man selvsagt ta hensyn til ved tilbakekobling fra motorstrøm. En enkel løsning er å måle summen av strømmen ut fra bryterne S_{A-} og S_{B-} som vist i figur 1.15, hvor motstanden R_s brukes for strømmåling.

Dødbåndet kan også elimineres med spenningstilbakekobling. I dette tilfelle tas det tilbakekobling fra u_a . Regulatoren bør være en PI-regulator.



Figur 1.15: Fire-kvadrant forsterker realisert med full brokobling.

1.8.6 Lineære servoforsterkere

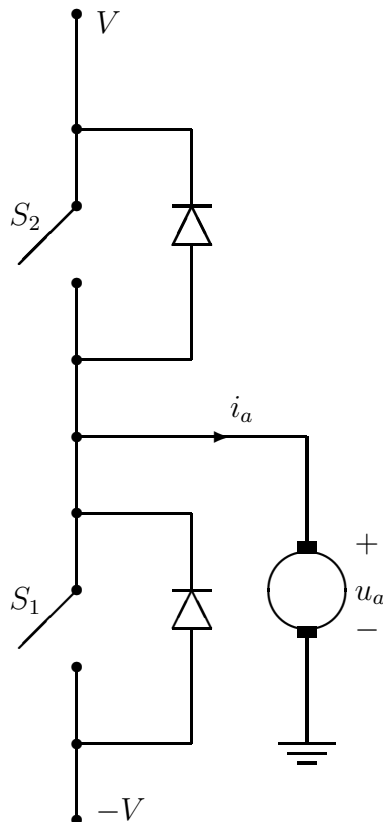
Lineære servoforsterkere har ikke svitsjete signaler, og opererer i den lineære del av transistorenes arbeidsområde. Denne type forsterker har stort effekttap over transistorene, og dette gir problemer med avkjøling. I dag finnes det mange gode og billige svitsjete systemer på markedet, og lineære forsterkere er derfor mindre brukt.

Lineære forsterkere for firekvadrantstyring kan være av typen H-bro (figur 1.15) eller T-bro (figur 1.16).

H-broen er beskrevet i kapittel 1.8.5. T-broen har to spenningskilder og to transistorer, og er enklere å bruke i lineære forsterkere enn H-broen. Det er imidlertid en ulempe at denne broen må ha to spenningskilder.

1.9 Strømtilbakekobling

Det er vanlig å bruke strømtilbakekobling i likestrømsmotorer.



Figur 1.16: Fire-kvadrant forsterker realisert med T-bro.

Strømtilbakekoblingen kan utføres med en proporsjonalregulator

$$u_a = K_i(i_0 - i_a) \quad (1.51)$$

hvor i_0 er strømreferansen som vanligvis genereres av

$$i_0 = \frac{1}{K_T} T_0 \quad (1.52)$$

hvor T_0 er momentreferansen. Pga. proporsjonaliteten mellom dreiemoment og ankerstrøm er strømstyring i realiteten en momentstyring.

Sløyfetransferfunksjonen for strømsløyfen blir

$$h_0(s) = K_i \frac{J_m}{K_E K_T} \frac{s}{T_a T_m s^2 + T_m s + 1} \quad (1.53)$$

som er stabil for alle K_i siden $\angle h_0(j\omega) > -90^\circ$.

Ut fra blokkdiagrammet til likestrømsmotoren får man modellen

$$\theta_m(s) = \frac{\frac{K_i}{K_E} i_0(s) - \frac{R_a + K_i}{K_E K_T} (1 + \tilde{T}_a s) T_L(s)}{s(\tilde{T}_a \tilde{T}_m s^2 + \tilde{T}_m s + 1)} \quad (1.54)$$

for motor med strømtilbakekobling hvor

$$\tilde{T}_a = \frac{L_a}{R_a + K_i} \rightarrow \frac{L_a}{K_i} \quad \text{når } K_i \rightarrow \infty \quad (1.55)$$

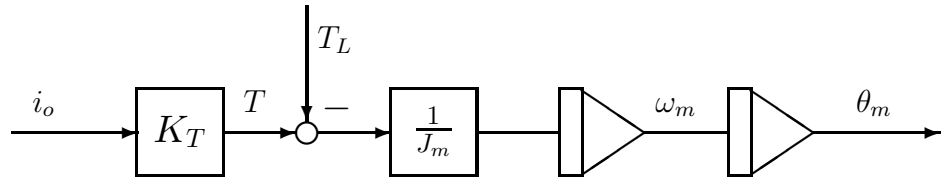
$$\tilde{T}_m = \frac{J_m(R_a + K_i)}{K_E K_T} \rightarrow \frac{J_m K_i}{K_E K_T} \quad \text{når } K_i \rightarrow \infty \quad (1.56)$$

$$\tilde{T}_a \tilde{T}_m = T_a T_m = \frac{J_m L_a}{K_E K_T} \quad (1.57)$$

Når $K_i \rightarrow \infty$ blir dermed

$$\theta_m(s) = \frac{K_T}{J_m s^2} i_0(s) - \frac{1}{J_m s^2} T_L(s) \quad (1.58)$$

Modellen er i dette tilfelle en dobbelintegrator både fra strømreferanse og lastmoment til motorvinkel som vist i figur 1.17. Legg merke til at strømtilbakekoblingen gjør det åpne systemet mer følsomt for lastmomentet.



Figur 1.17: Blokkdiagram for strømstyrt likestrømsmotor.

En PI-regulator

$$u_a = K_i T_i \frac{1 + T_i s}{T_i s} (i_0 - i_a) \quad (1.59)$$

med $T_i = T_m$ i strømtilbakekoblingen gir

$$h_0(s) = K_i \frac{J_m}{K_E K_T} \frac{1}{1 + T_a s} \quad (1.60)$$

som er effektiv også ved lave frekvenser. Det er her antatt at $T_a \ll T_m$ slik at telleren i $h_0(s)$ kan faktoriseres i $(1 + T_a s)(1 + T_m s)$. Også i dette tilfelle oppnås modellen angitt i lign. (1.58) når forsterkningen K_i er stor nok.

En likestrømsmotor med strømstyring sies å være en **strømstyrt likestrømsmotor** siden pådraget til motoren er strømreferansen.

I praksis implementeres strømstyringen ved puls-bredde-modulasjon.

1.10 Hastighetsstyring

Likestrømsmotorer er vanligvis utstyrt med et tachometer som måler vinkelhastigheten ω_m . Vi skal her se på hastighetsstyring av en strømstyrt likestrømsmotor. Modellen er

$$\omega_m(s) = \frac{K_T}{J_m s} i_0(s) - \frac{1}{J_m s} T_L(s) \quad (1.61)$$

Anta at en hastighetsreferanse $\omega_0(t)$ er gitt. Med proporsjonalregulator

$$i_0(s) = K_\omega (\omega_0 - \omega_m) \quad (1.62)$$

fås sløyfetransferfunksjonen

$$h_0(s) = K_\omega \frac{K_T}{J_m s} \quad (1.63)$$

Sløyfetransferfunksjonen har -90° fase for alle ω , og systemet er derfor stabilt for alle K_ω . I praksis er ikke modellen gyldig for høye frekvenser hvor strømsløyfen ikke er effektiv, eller hvor det kan være mekaniske resonanser eller andre umodellerte effekter, og dette begrenser forsterkningen K_ω . Sløyfetransferfunksjonen h_0 kan skrives

$$h_0(s) = K_a \frac{1}{s} \quad (1.64)$$

hvor

$$K_a = \frac{K_T K_\omega}{J_m} \quad (1.65)$$

er **akselerasjonskonstanten** til systemet.

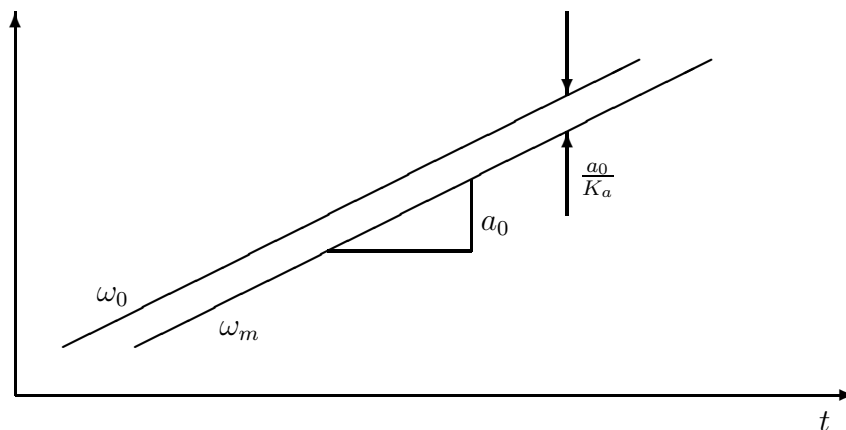
Hvis referansen er en rampe $\omega_0(t) = a_0 t$ i hastighet, ser man av

$$\dot{\omega}_m(t) = K_a[\omega_0(t) - \omega_m(t)] \quad (1.66)$$

at det stasjonære avviket som gir $\dot{\omega}_m = a_0$ er

$$\omega_0 - \omega_m = \frac{a_0}{K_a} \quad (1.67)$$

Reguleringsavviket er altså proporsjonalt med akselerasjonen a_0 og invert proporsjonalt med K_a (figur 1.18). Dette er bakgrunnen for betegnelsen akselerasjonskonstant for K_a .



Figur 1.18: Stasjonært avvik med en rampe $\omega_0 = a_0 t$ i referansehastigheten og en akselerasjonskonstant på K_a .

Systemets kryssfrekvens ω_c definert ved $|h_0(j\omega_c)| = 1$ (0 dB) er:

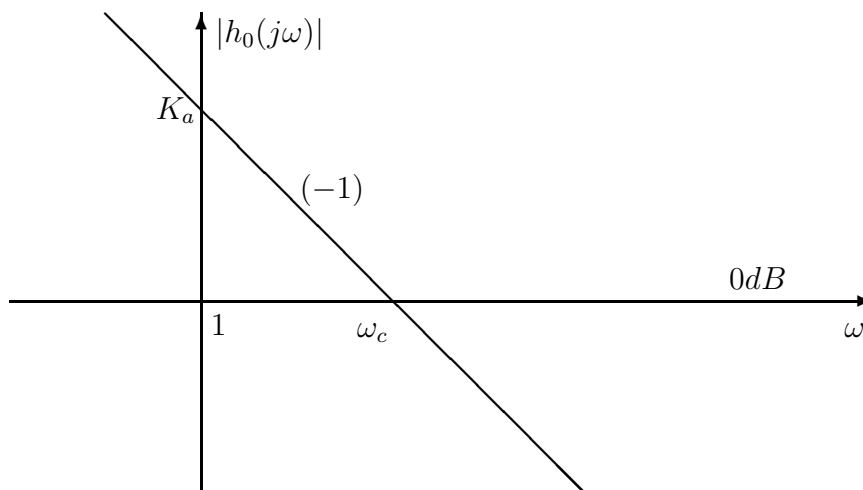
$$\omega_c = K_a \quad (1.68)$$

hvilket sees av figur 1.19.

Den lukkede sløyfen har modellen

$$\omega_m(s) = \frac{1}{1 + \frac{s}{K_a}} \omega_0(s) - \frac{1}{J_m K_a} \frac{1}{1 + \frac{s}{K_a}} T_L(s) \quad (1.69)$$

Legg merke til at den eneste parameteren i følgeforholdet $M(s) = \frac{\omega_m}{\omega_0}(s)$ er K_a , og at følsomheten for lastmoment er invert proporsjonal med K_a .



Figur 1.19: Bodediagram for hastighetsløyfe som består av en åpen integrator og en forsterkning K_a . Det fremgår av figuren at siden helningen på kurven er -1 , så er kryssfrekvensen gitt av $\omega_c = K_a$.

Hvis referansen ω_0 er konstant, vil et konstant lastmoment $T_L = T_{L0}$ gi et stasjonært avvik

$$\omega_0 - \omega_m = \frac{1}{J_m K_a} T_{L0} \quad (1.70)$$

som finnes ved anvendelse av sluttverditeoremet på lign. (1.69).

Det er klart at K_a bør være størst mulig for å få høyest mulig båndbredde og minst mulig følsomhet for lastmomentet. Forsterkningen er imidlertid begrenset av kryssfrekvensen, som er begrenset av mekaniske resonanser, strømsløyfes dynamikk, tastefrekvensen og målelementenes båndbredde.

Hvis man ønsker mindre følsomhet for lastmomentet og andre forstyrrelser ved lave frekvenser kan det være gunstig med integralvirkning. I servosystemer skal man være forsiktig med ubegrenset integralvirkning fordi dette kan gi store svingninger og til og med ustabilitet. En begrenset integralvirkning

$$i_0(s) = K_\omega \beta \frac{1 + T_i s}{1 + \beta T_i s} [\omega_0(s) - \omega_m(s)] \quad (1.71)$$

hvor $\beta = 100$ gir en økt forsterkning med 40 dB ved frekvenser $\omega \ll \frac{1}{\beta T_i}$. Sløyfetransferfunksjonen blir

$$h_0(s) = K_{ac} \frac{1 + T_i s}{1 + \beta T_i s} \frac{1}{s} \quad (1.72)$$

hvor

$$K_{ac} = K_a \beta \quad (1.73)$$

Dette er systemets akselerasjonskonstant ved bruk av regulatoren gitt av lign. (1.71) siden $\omega_0(t) = a_0 t$ gir stasjonært

$$\omega_0 - \omega = \frac{a_0}{K_{ac}} \quad (1.74)$$

hvilket vises ved bruk av sluttverditeoremet. Likeledes kan det vises at med konstant ω_0 blir det stasjonære avviket på grunn av et konstant lastmoment

$$\omega_0 - \omega_m = \frac{1}{J_m K_{ac}} T_{L0} \quad (1.75)$$

som er redusert med en faktor β i forhold til avviket ved bruk av proporsjonalregulator. Sløyfetransferfunksjonen oppfyller de asymptotiske sammenhengene

$$|h_0(j\omega)| = \begin{cases} K_{ac} \frac{1}{\omega}, & \omega \ll \frac{1}{\beta T_i} \\ K_a \frac{1}{\omega}, & \omega \gg \frac{1}{T_i} \end{cases} \quad (1.76)$$

Her vil $1/T_i \leq \omega_c$ gi en fasemargin $\psi \geq 45^\circ$.¹

Denne løsningen er gunstig hvis motoren skal følge referansetrajektorer som varierer med lave frekvenser. Dette er tilfelle for numerisk styrte maskiner og styring av en antenne for følgning av en satellitt. For robotstyring er ikke denne løsningen nødvendigvis gunstig. En robot skal vanligvis følge referanser som varierer med frekvenser opp mot robotens båndbredde, og for disse frekvensene vil integralvirkningen ha en tendens til å gi oversving. Grunnen til dette er rett og slett at hvis et reguleringsavvik oppstår, og integralvirkningen korrigerer pådraget ved å integrere opp avviket, vil roboten være igang med å gjøre noe annet og avviket kan ha skiftet fortegn før integralvirkningen har fått noen innvirkning.

1.11 Hastighetsservo med posisjonsregulator

En likestrømsmotor har hastighetsregulering med båndbredde ω_{cv} og akselerasjonskonstant $K_a = \omega_{cv}$. En posisjonsregulator skal designes. Modellen er

$$\theta_m(s) = \frac{1}{s} \omega_m(s) = \frac{1}{s(1 + \frac{s}{K_a})} \omega_0(s) - \frac{1}{J_m K_a} \frac{1}{s(1 + \frac{s}{K_a})} T_L(s) \quad (1.77)$$

Denne type system kan styres med proporsjonal tilbakekobling:

$$\omega_0(s) = K_v(\theta_0(s) - \theta_m(s)) \quad (1.78)$$

som gir

$$h_0(s) = \frac{K_v}{s(1 + \frac{s}{K_a})} \quad (1.79)$$

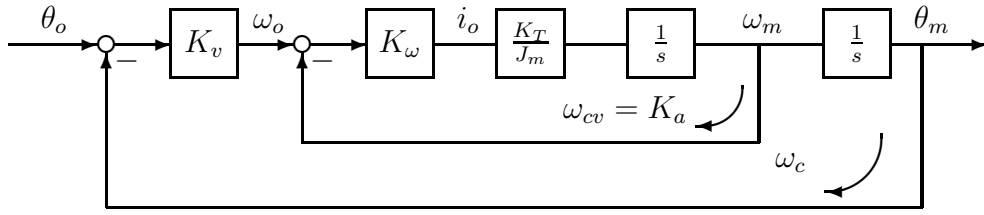
Systemet er vist på blokkdiagramform i figur 1.20.

Vi skal se på to tilfeller: Først antas det at hastighetssløyfen har mye større båndbredde enn posisjonssløyfen, og deretter at de to sløyfene har tilnærmet samme båndbredde.

1. Ofte vil båndbredden i hastighetssløyfen være vesentlig høyere enn i posisjonssløyfen, dvs.

$$\omega_{cv} \gg \omega_c \quad (1.80)$$

¹En mye brukt designregel er å legge $1/T_i$ omkring en deka under kryssfrekvensen. Begrunnelsen for dette er at integralvirkningen ikke skal gi negativ fase ved kryssfrekvensen. Dette er ikke en aktuell problemstilling for denne prosessen som har 90° fasemargin uten integralvirkning.



Figur 1.20: Strømstyrt likestrømsmotor med hastighets- og posisjonssløyfe.

som også betyr at $K_a \gg K_v$. Dette kan være nødvendig hvis systemet har mekaniske resonanser eller posisjonsmålingen har grov kvantisering eller lav tastefrekvens. I denne sammenheng kan man benytte tilnærmelsen $h_0(s) = K_v/s$ ved regulatordesign i posisjonssløyfen.

Regulatordesign blir da som for hastighetssløyfen, og med proporsjonalregulator blir kryssfrekvensen lik hastighetskonstanten:

$$\omega_c = K_v \quad (1.81)$$

2. Hvis kryssfrekvensen til hastighets- og posisjonssløyfe har samme øvre begrensning, må man ta hensyn til hastighetssløyfens dynamikk ved design av posisjonssløyfen. Dette kan gjøres ved analyse av h_0 i Bodediagram, men for et enkelt system av andre orden er det ofte mer hensiktsmessig å studere følgeforholdet $M(s) = \theta_m(s)/\theta_0(s)$ og støypåvirkningen direkte.

Følgeforholdet finnes å være

$$M(s) = \frac{1}{1 + \frac{1}{K_v}s + \frac{1}{K_v K_a}s^2} = \frac{1}{1 + 2\zeta\frac{s}{\omega_0} + \frac{s^2}{\omega_0^2}} \quad (1.82)$$

hvor

$$\omega_0^2 = K_v K_a, \quad \zeta = \frac{1}{2}\sqrt{K_a/K_v}$$

Et typisk valg er $\zeta = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ som oppnås med $K_a = 2K_v$. En gitt knekkfrekvens ω_0 oppnås da med $K_v = \sqrt{2}\omega_0$.

Målingen er

$$\theta_m(s) = M(s)\theta_0(s) - \frac{1}{J_m K_a K_v} M(s) T_L(s) \quad (1.83)$$

hvor innvirkningen fra lastmomentet finnes ved manipulasjon av blokkdiagrammet eller ved direkte utregning. Stasjonært avvik ved konstant referanse θ_0 og konstant lastmoment T_{L0} blir

$$\theta_0 - \theta_m = \frac{1}{J_m K_a K_v} T_{L0} \quad (1.84)$$

Legg merke til at avviket er inverst proporsjonalt med produktet av hastighets- og akselerasjonskonstant.

K_v er systemets hastighetskonstant. Vedfølging av en rampe $\theta_0(t) = v_0 t$, oppstår et stasjonært avvik

$$\theta_0 - \theta_m = \frac{v_0}{K_v} \quad (1.85)$$

Dette vises ved bruk av sluttverditeoremet.

Som for hastighetssløyfen kan begrenset integralvirkning inkluderes med

$$\omega_0(s) = K_{vc} \frac{1 + T_i s}{1 + \beta T_i s} (\theta_0(s) - \theta_m(s)) \quad (1.86)$$

med

$$K_{vc} = K_v \beta \quad (1.87)$$

hvor $\beta = 100$ gir 40 dB økt forsterkning ved lave frekvenser, mens $\beta = 10$ gir 20 dB økning. Dette gir mer nøyaktig finposisjonering ved lave hastigheter for referanser som varierer med lave frekvenser. For referanser med raske bevegelser gir integralvirkning vanligvis redusert følgenøyaktighet.

Hastighetskonstanten er i dette tilfelle K_{vc} siden en referanse $\theta_0(t) = v_0 t$ gir et stasjonært avvik

$$\theta_0 - \theta_m = \frac{v_0}{K_{vc}} \quad (1.88)$$

Det er også relativt greit å vise at det stasjonære avvik fra et konstant lastmoment blir

$$\theta_0 - \theta_m = \frac{1}{J_m K_a K_{vc}} T_{L0} \quad (1.89)$$

med P-regulator i hastighetssløyfen. Bruk av en begrenset PI-regulator i hastighetssløyfen resulterer i

$$\theta_0 - \theta_m = \frac{1}{J_m K_{ac} K_{vc}} T_{L0} \quad (1.90)$$

K_{ac} er her akselerasjonskonstanten i hastighetssløyfen ved bruk av begrenset integralvirkning som beskrevet i lign. (1.71) og (1.72).

1.12 Posisjonsservo uten hastighetsmåling

En likestrømsmotor uten strøm og hastighetsmåling skal styres. Referansen er $\theta_0(t)$. Transferfunksjonen er

$$\frac{\theta_m}{u_a}(s) = \frac{\frac{1}{K_E}}{s(1 + T_m s)(1 + T_a s)} \quad (1.91)$$

I det følgende antas at $T_m = 100T_a$. Hvis forholdet mellom T_m og T_a er et annet, må resultatene i det følgende modifieres litt, men fremgangsmåte og løsningens struktur blir den samme.

Først undersøkes en proporsjonalregulator

$$u_a = K_p (\theta_0 - \theta_m) \quad (1.92)$$

Ved å velge $K_p = \sqrt{2} K_E / T_m$ oppnås en kryssfrekvens $\omega_c = \frac{1}{T_m}$ med en fasemargin $\psi = \arctan 1 - \arctan 0.01 \approx 45^\circ$.

Høyere båndbredde kan oppnås med en PD-regulator

$$u_a(s) = K_p \frac{1 + T_d s}{1 + T_f s} (\theta_0(s) - \theta_m(s)) \quad (1.93)$$

Her skal vi anta at filtertiden er $T_f = 0.1T_d$. I servoteknikken er det vanlig med pol/nullpunkt-forkortinger ved seriekompensasjon. Her kan det gjøres ved å velge

$$T_d = T_m \quad (1.94)$$

som gir

$$h_0(s) = K_v \frac{1}{s(1 + T_f s)(1 + T_a s)} = K_v \frac{1}{s(1 + 0.1T_m s)(1 + T_a s)} \quad (1.95)$$

hvor $K_v = \frac{K_p}{K_E}$ er systemets **hastighetskonstant**. Ved følgende av en rampe $\theta_0(t) = v_0 t$, oppstår et stasjonært avvik

$$\theta_0 - \theta_m = \frac{v_0}{K_v} \quad (1.96)$$

Dette vises ved bruk av sluttverditeoremet.

Kryssfrekvensen må velges litt mindre enn $1/T_f$ slik at en akseptabel fasemargin oppnås. Hvis

$$\omega_c = 0.8 \frac{1}{T_f} = 8 \frac{1}{T_m} \quad (1.97)$$

benyttes, er systemet stabilt med en fasemargin

$$\psi = \arctan \frac{1}{0.8} - \arctan 0.08 \approx 46.8^\circ \quad (1.98)$$

Hastighetskonstanten blir

$$K_v = \sqrt{1 + 0.8^2} \omega_c \approx 10.2 \frac{1}{T_m} \quad (1.99)$$

Forsterkningen og dermed hastighetskonstanten er altså begrenset av filtertiden, som igjen er begrenset av støy i målingene og mekaniske resonanser.

Hvis referansen varierer langsomt er det gunstig å inkludere begrenset integralvirkning

$$u_a = K_p \beta \frac{1 + T_i s}{1 + \beta T_i s} \frac{1 + T_d s}{1 + T_f s} (\theta_0 - \theta_m) \quad (1.100)$$

Her kan man velge $\beta = 10$, $T_i = T_d = T_m$ og $T_f = 0.1T_d$ som gir

$$h_0(s) = 10K_v \frac{1 + T_m s}{s(1 + 10T_m s)(1 + 0.1T_m s)(1 + 0.01T_m s)} \quad (1.101)$$

En kryssfrekvens på

$$\omega_c = 6 \frac{1}{T_m} \quad (1.102)$$

gir en fasemargin $\psi = 47^\circ$, og $K_v = 6.9/T_m$. Hastighetskonstanten blir

$$K_{vc} = 10K_v = 69/T_m \quad (1.103)$$

I [3] er $T_a = 0.1T_m$. I dette tilfelle resulterer regulatoren gitt av lign. (1.100) i

$$h_0(s) = 10K_v \frac{1 + T_m s}{s(1 + 10T_m s)(1 + 0.1T_m s)^2} \quad (1.104)$$

hvor $\beta = 10$, $T_i = T_d = T_m$ og $T_f = 0.1T_d$ som over. Her kan en fasemargin $\psi = 43.7^\circ$ oppnås med

$$\omega_c = 2\frac{1}{T_m} \quad (1.105)$$

Hastighetskonstanten er da

$$K_v = \frac{1.87}{T_m} = 0.935\omega_c \quad (1.106)$$

Forsterkningen ved lave frekvenser blir $10K_v = 18.7/T_m$.

1.13 Vippetass

En vippetass er betegnelsen på en laboratorieoppstilling hvor en kule ruller i et spor på en bjelke. Bjelken dreies av en servomotor, og posisjonen til kulen langs bjelken kan dermed styres. En prinsippskisse er vist i figur 1.21.

Figur 1.21: *Vippetass*

Kulen har radius r og masse m . Kulens treghetsmoment er

$$J = \frac{2}{5}mr^2 \quad (1.107)$$

som finnes av en lærebok i grunnleggende dynamikk (f.eks. [18]). Sporet har en vinkel θ relativt til horisontalen. Kulen har en posisjon x langs sporet og ruller med en vinkelhastighet $\Omega = \dot{x}/r$ idet det antas at kulen ruller uten å skli.

Spinnsatsen for kulen gir

$$J\dot{\Omega} = rF \quad (1.108)$$

hvor F er komponenten langs sporet av kontaktkraften mellom kule og spor. Newtons lov for translasjonsbevegelsen gir

$$m\ddot{x} = -F + mg \sin \theta + mx\dot{\theta}^2 \quad (1.109)$$

hvor det siste leddet på høyre side er sentrifugalkraften. Ved å løse ut F av lign. (1.108) og sette inn i lign. (1.109) fremkommer bevegelsesligningen

$$\frac{7}{5}m\ddot{x} = mg \sin \theta + mx\dot{\theta}^2 \quad (1.110)$$

siden $m + J/r^2 = (7/5)m$. Modellen lineariseres om $\dot{\theta} = 0$ og $\theta = 0$ ved å sette $\dot{\theta}^2 \approx 0$ og $\sin \theta \approx \theta$. Dette gir den lineariserte modellen

$$\ddot{x} = K\theta \quad (1.111)$$

hvor

$$K = \frac{5}{7}g \quad (1.112)$$

Servomotoren har modellen

$$(J_m + mx^2)\ddot{\theta} = K_m u_m + mgx \cos \theta - 2mx\dot{x}\dot{\theta} \quad (1.113)$$

hvor J_m er treghetsmomentet av motor og bjelke, mx^2 er treghetsmomentet på motorakslingen fra kulen. Det siste leddet på høyre side er Coriolisakselerasjonen. Linearisering om $\dot{x} = 0$, $x = 0$ og $\theta = 0$ gir den lineære modellen

$$J_m\ddot{\theta} = K_m u_m + mgx \quad (1.114)$$

Den totale modellen er

$$\frac{d^4}{dt^4}x = \frac{1}{J_m}mgx + \frac{KK_m}{J_m}u_m \quad (1.115)$$

Det er åpenbart at interne tilbakekoblinger må benyttes.

Her presenteres en løsning hvor servomotoren har en hastighetssløyfe, og hvor tilbakekobling fra motorvinkelen θ brukes. Hastighetssløyfen antas å ha høy båndbredde, og servomotoren kan derfor beskrives med modellen

$$\dot{\theta} = u_I \quad (1.116)$$

hvor u_I er pådraget i den interne posisjonssløyfen på motoren. u_I er her referansen til motorens hastighetssløyfe. Det forutsettes videre at motorens posisjonssløyfe har kryssfrekvens $\omega_{c\theta}$ som er mye større enn kryssfrekvensen ω_{cx} i den ytre sløyfen som styrer kulens posisjon. Kulens bevegelse kan dermed beskrives med

$$\ddot{x} = K u_Y \quad (1.117)$$

hvor u_Y er pådraget i den ytre sløyfen. Her er u_Y referansen til motorens posisjonssløyfe.

En P-regulator

$$u_I = K_I(\theta_0 - \theta) \quad (1.118)$$

kan nå brukes for å styre θ , mens en PD-regulator

$$u_Y(s) = K_Y \frac{1 + T_d s}{1 + T_f s} (x_0 - x) \quad (1.119)$$

kan brukes for å styre x .

Kapittel 2

Dynamisk tilbakekobling

2.1 Innledning

Dynamisk tilbakekobling brukes primært i interne tilbakekoblinger. I motorstyring er det vanlig med dynamisk tilbakekobling fra motorhastigheten. Dynamisk tilbakekobling brukes også på hjelpeaktuatorer som ventilmotorer eller på posisjonservoer som inngår som deler av en større sløyfe.

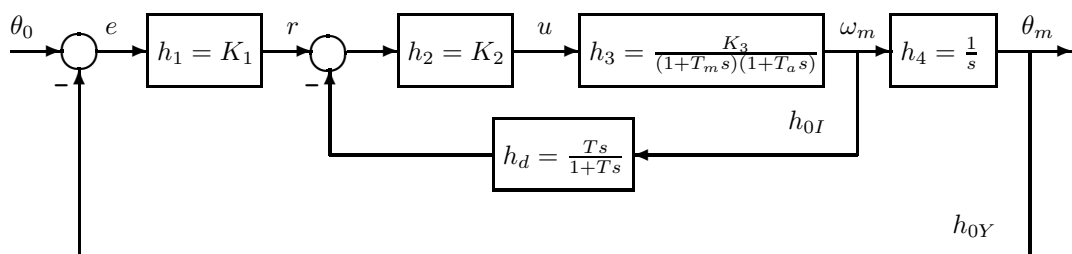
2.2 Spenningsstyrt likestrømsmotor

I det følgende skal dynamisk tilbakekobling fra hastigheten i en spenningsstyrt likestrømsmotor studeres. Stoffet er hentet fra [6] og bearbeidet. Systemets er vist i figur 2.1, og har transferfunksjoner $h_1(s) = K_1$, $h_2(s) = K_2$,

$$h_3(s) = \frac{\omega_m}{u}(s) = \frac{K_3}{(1 + T_m s)(1 + T_a s)} \quad (2.1)$$

hvor $T_m \gg T_a$, u er pådraget, $K_3 = 1/K_E$, og

$$h_4(s) = \frac{\theta_m}{\omega_m}(s) = \frac{1}{s} \quad (2.2)$$



Figur 2.1: Blokkdiagram for motor med dynamisk tilbakekobling fra hastighet.

En dynamisk tilbakekobling

$$h_d(s) = \frac{T_s}{1 + T_s s} \quad (2.3)$$

brukes i hastighetssløyfen slik at

$$u(s) = h_2(s)[r(s) - h_d(s)\omega_m(s)] \quad (2.4)$$

hvor $r(s)$ er inngangssignalet til hastighetssløyfen.

Sløyfetransferfunksjonen i hastighetssløyfen er

$$h_{0I}(s) = h_2(s)h_3(s)h_d(s) = K_2K_3 \frac{Ts}{(1+Ts)(1+T_ms)(1+T_as)} \quad (2.5)$$

Her er $\angle h_{0I}(j\omega) > -180^\circ$ for alle ω , og den interne sløyfen som gitt av modellen er alltid stabil. For å få en akseptabel fasemargin bør ikke kryssfrekvensen være større enn $1/T_a$.

Transferfunksjonen fra $r(s)$ til $\omega_m(s)$ er

$$\frac{\omega_m}{r}(s) = \frac{h_2h_3}{1+h_{0I}} \quad (2.6)$$

Innvirkningen av den dynamiske tilbakekoblingen sees best av tilnærmelsene

1. $|h_{0I}| \gg 1$:

$$\frac{\omega_m}{r} \approx \frac{h_2h_3}{h_{0I}} = \frac{1}{h_d} \quad (2.7)$$

2. $|h_{0I}| \ll 1$:

$$\frac{\omega_m}{r} \approx h_2h_3 \quad (2.8)$$

Her ser vi at når sløyfeforsterkningen er stor, så er transferfunksjonen fra r til ω_m lik den inverse av den dynamiske tilbakekoblingen. Videre ser vi at når sløyfeforsterkningen er liten, så har ikke den dynamiske tilbakekoblingen noen innvirkning. På bakgrunn av dette kan man forstå det spesielle valget av $h_d(s)$ som er gjort i lign. (2.3).

I posisjonssløyfen brukes en regulator $h_1(s) = K_1$ slik at

$$r(s) = h_1(s)e(s) \quad (2.9)$$

hvor $e = \theta_0 - \theta$ er reguleringsavviket. Posisjonssløyfen har sløyfetransferfunksjon

$$h_{0Y}(s) = h_1(s) \frac{h_2(s)h_3(s)}{1+h_{0I}(s)} h_4(s) \quad (2.10)$$

Videre defineres den ukompenserte sløyfetransferfunksjonen

$$h_{0Yu}(s) = h_1(s)h_2(s)h_3(s)h_4(s) \quad (2.11)$$

som er den ytre sløyfes transferfunksjon når $h_d(s) = 0$.

Effekten av den interne tilbakekoblingen kan studeres ut fra tilnærmingene

1. $|h_{0I}| \gg 1$:

$$h_{0Y} \approx \frac{h_1h_2h_3h_4}{h_{0I}} = \frac{h_1h_4}{h_d} \quad (2.12)$$

2. $|h_{0I}| \ll 1$:

$$h_{0Y} \approx h_1h_2h_3h_4 = h_{0Yu} \quad (2.13)$$

I frekvensområdet hvor den interne tilbakekoblingen er effektiv virker den dynamiske tilbakekoblingen som en PI-regulator:

$$\frac{1}{h_d(s)} = \frac{1 + Ts}{Ts} \quad (2.14)$$

Utenfor dette frekvensområdet har ikke den dynamiske tilbakekoblingen noen effekt. Den dynamiske tilbakekoblingen virker altså som en begrenset PI-regulator i posisjonssløyfen.

Eksempel 2.1 Et system for posisjonsstyring av en spenningsstyrt likestrømmotor skal syntetiseres. Motoren har måling $y = \theta_m$ som er motorvinkelen, mens ω_m er motorens vinkelhastighet. Motoren har transferfunksjon

$$\frac{y}{u}(s) = h_3(s)h_4(s) \quad (2.15)$$

hvor

$$h_3(s) = \frac{10}{1 + 0.05s} \quad (2.16)$$

og

$$h_4(s) = \frac{1}{s} \quad (2.17)$$

Følgende spesifikasjoner er gitt:

1. Null stasjonært avvik i posisjon.
2. Hastighetskonstant på $K_v = 1000$.
3. $|N(j\omega)| \leq 0.01$ for $\omega \leq 2$ (rad/s).
4. Fasemargin $\psi \geq 45^\circ$

Punkt 3 oppfylles med $|h_{0Y}(j\omega)| \geq 100$ for $\omega \leq 2$ rad/s, hvor $h_{0Y}(s)$ er posisjonssløyfens transferfunksjon slik at $N(s) = 1/(1 + h_{0Y}(s))$.

Med kun proporsjonalvirkning tilfredsstilles punkt 1 og 2 med sløyfetransferfunksjonen

$$h_{0Y_u} = 100h_3h_4 \quad (2.18)$$

Asymptotisk amplitude for h_{0Y_u} er vist i figur 2.2. Fasemarginen er ikke tilfredsstillende i dette tilfelle.

Spesifikasjonene skal oppfylles ved å bruke en intern tilbakekobling som vist i figur 2.1.

Den åpne integratoren fra hastighet til posisjon gjør at systemet er av type 1 med null stasjonært posisjonsavvik ved sprang i referansen (se kapittel 10.2), og denne integratoren må derfor ikke omslutes av den interne tilbakekoblingen. Det er åpenbart at den interne tilbakekoblingen må være fra hastigheten. Hastigheten måles med et tachometer.

Sløyfetransferfunksjonen til posisjonssløyfen endres i det frekvensområdet hvor den dynamiske tilbakekoblingen er effektiv. Utenfor dette frekvensområdet er $h_{0Y} \approx h_{0Y_u}$. En h_{0Y} som tilfredsstillers spesifikasjonene er

$$h_{0Y}(s) = \frac{1000(1 + \frac{s}{10})}{s(1 + \frac{s}{0.4})(1 + \frac{s}{500})} \quad (2.19)$$

Figur 2.2: Frekvensrespons av ukompensert sløyfetransferfunksjon h_{0Y_u} . Spesifikasjon 3 er markert ved krav om en forsterkning på 100 ved $\omega = 2$ rad/s.

Asymptotisk amplitude er vist i figur 2.3.

Det er mulig å oppnå denne sløyfetransferfunksjonen ved å bruke en dynamisk tilbakekobling fra hastigheten. Den interne sløyfens transferfunksjon $h_{0I}(s)$ finnes av

$$h_{0Y} = \frac{h_{0Y_u}}{1 + h_{0I}} \approx \begin{cases} \frac{h_{0Y_u}}{h_{0I}} & |h_{0I}| \gg 1 \\ h_{0Y_u} & |h_{0I}| \ll 1 \end{cases} \quad (2.20)$$

Den ønskede h_{0Y} kan dermed realiseres med den dynamiske tilbakekoblingen

$$h_d(s) = \frac{0.1s}{1 + 0.1s} \quad (2.21)$$

og med forsterkningene $h_1(s) = K_1 = 40$ og $h_2(s) = K_2 = 2.5$. Dette gir

$$h_{0I}(s) = 25 \frac{0.1s}{1 + 0.1s} \frac{1}{1 + 0.05s} \quad (2.22)$$

som asymptotisk gir den ønskede h_{0Y} i frekvensområder hvor $h_{0I} \gg 1$ og $h_{0I} \ll 1$. I frekvensområder hvor $|h_{0I}| \approx 1$ vil resultatet være mer usikkert, men vanligvis vil tilnærmelsen være god nok. Asymptotisk amplitude for sløyfetransferfunksjonen til ytre og indre sløyfe er vist i figur 2.4. Legg merke til at i logaritmisk skala finnes den kompenserte transferfunksjonen h_{0Y} ved å subtrahere h_{0I} fra h_{0Y_u} .

Figur 2.3: *Asymptotisk amplitude av sløyfetransferfunksjon h_{0Y} som oppfyller spesifikasjonene, vist sammen med asymptotisk amplitude for ukompensert sløyfetransferfunksjon h_{0Yu}*

Nøyaktigheten av den asymptotiske analysen bør undersøkes til slutt. En sammenligning mellom asymptotisk løsning og eksakt Bodediagram for h_{0Y} er vist i figur 2.5. Det er tydelig at den tilnærmede løsningen er tilstrekkelig nøyaktig for denne type analyse. Fasemarginen er på 72° som er godt over spesifikasjonen.

Den samme h_{0Y} kan fremkomme med seriekompensasjon som vist i figur 2.7. En regulator $h_r(s)$ som gir samme h_{0Y} er

$$h_r(s) = \frac{1 + 0.1s}{1 + 2.5s} \frac{1 + 0.05s}{1 + 0.002s} \quad (2.23)$$

Dette er en PID-regulator med begrenset integral- og derivatvirkning. Legg merke til at i denne regulatoren er den største tidskonstanten 2.5, mens med dynamisk tilbakekobling er største tidskonstant i regulatoren 0.1. Store tidskonstanter i forbindelse med begrenset integralvirkning gir problemer i forbindelse med metning, og det er derfor en stor fordel med intern tilbakekobling at begrenset integralvirkning oppnås uten store tidskonstanter.

Anta så at motoren påvirkes av støyen v som vist i figur 2.6. Her er v et forstyrrende moment som kommer inn i den interne sløyfen og påvirker ω_m . Støyens transferfunksjon $h_v(s)$ i åpen sløyfe er definert ved

$$\frac{y_v}{v}(s) = h_v(s) \quad (2.24)$$

Figur 2.4: *Asymptotisk amplitude for sløyfetransferfunksjon h_{0Y} for ytre og h_{0I} indre sløyfe sammen med asymptotisk amplitude den ukompenserte sløyfetransferfunksjonen h_{0Yu} .*

hvor y_v er målingen som resulterer fra støypåvirkningen.

Med intern tilbakekobling og åpen posisjonssløyfe blir transferfunksjonen fra støy til måling redusert med en faktor $1 + h_{0I}(s)$ slik at

$$\frac{y_v}{v}(s) = \frac{h_v(s)}{1 + h_{0I}(s)} \quad (2.25)$$

Når posisjonssløyfen også lukkes fås en ytterligere reduksjon med en faktor $1 + h_{0Y}$, slik at med begge sløyfene lukket fås

$$\frac{y_v}{v}(s) = \frac{h_v(s)}{[1 + h_{0I}(s)](1 + h_{0Y}(s))} \quad (2.26)$$

Lign. (2.25) og (2.26) utledes fra systemets blokkdiagram.

Sløyfetransferfunksjonen for den ytre sløyfen er gitt av uttrykket

$$h_{0Y}(s) = \frac{h_{0Yu}}{1 + h_{0I}} \quad (2.27)$$

Innsetting i lign. (2.26) gir

$$\frac{y_v}{v}(s) = \frac{h_v(s)}{[1 + h_{0I}(s)]\left[1 + \frac{h_{0Yu}(s)}{1 + h_{0I}(s)}\right]} \quad (2.28)$$

Figur 2.5: Sammenligning av asymptotisk og eksakt kurve for amplituden av h_{0Y} sammen med fasen som viser at fasemarginen er 72° .

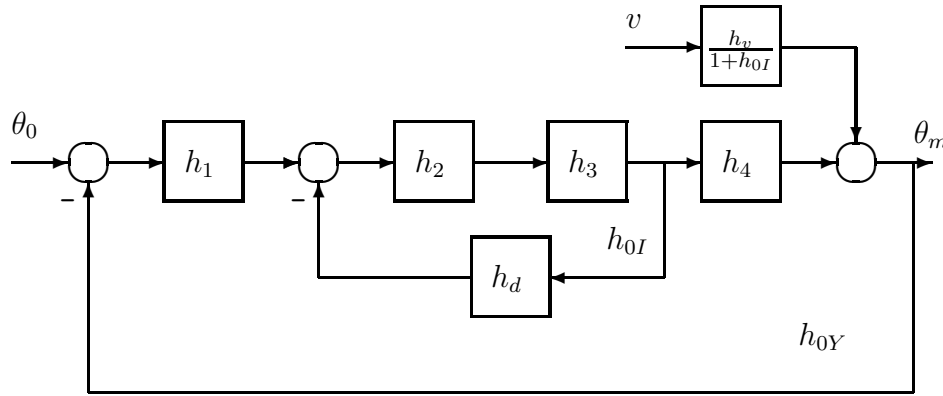
Dette uttrykket kan gis interessante tilnærmelser i ulike frekvensområder:

1. Hvis $|h_{0Y}(s)| \gg 1$, så er

$$\frac{y_v}{v}(s) \approx \frac{h_v(s)}{(1 + h_{0I}(s)) \frac{h_{0Y_u}(s)}{1+h_{0I}(s)}} = \frac{h_v(s)}{h_{0Y_u}(s)} \quad (2.29)$$

Støypåvirkningen reduseres altså med en faktor lik den ukompenserte transferfunksjonen h_{0Y_u} i stedet for den kompenserte transferfunksjonen h_{0Y} , som ville vært tilfelle ved bruk av en seriekompensasjon¹. For dette eksempelet betyr dette at ved f.eks. 5 rad/s vil støypåvirkningen reduseres med en faktor på 200 til $h_v(j5)/200$. Hvis seriekompensasjon brukes for å oppnå samme sløyfetransferfunksjon, fås en reduksjon på 16 til $h_v(j5)/16$, hvilket er over 12 ganger så mye. Forskjellen i støyreduksjon kan leses ut av Bodediagrammet i figur 2.4. Forholdet mellom demping av støyen med seriekompensasjon og med dynamisk tilbakekobling i indre sløyfe er lik forskjellen mellom h_{0Y_u} og h_{0Y} , som er tilnærmet lik h_{0I} når den interne tilbakekoblingen er aktiv.

¹Hvis seriekompensasjon brukes med samme sløyfetransferfunksjon h_{0Y} i posisjonssløyfen, vil transferfunksjonen fra støy til måling i lukket sløyfe være $y_v/v = h_v/(1 + h_{0Y}) \approx h_v/h_{0Y}$ for $|h_{0Y}(s)| \gg 1$.



Figur 2.6: Motor med dynamisk tilbakekobling fra hastighet og påvirkning fra en forstyrrelse v .

2. Hvis $|h_{0Y}(s)| \ll 1$ og $|h_{0I}(s)| \gg 1$, så er

$$\frac{y_v}{v}(s) \approx \frac{h_v(s)}{1+h_{0I}(s)} \approx \frac{h_v(s)}{h_{0I}(s)} \quad (2.30)$$

Det er fremdeles en reduksjon i støypåvirkningen selv om den ytre sløyfen ikke er effektiv. Ved f.eks. 50 rad/s er det en demping med en faktor på 6, som gir en støypåvirkning lik $h_v(j50)/6$, mens en tilsvarende seriekompensasjon i ytre sløyfe ville gitt $h_v(j50)$. Forskjellen mellom løsningen med intern tilbakekobling og seriekompensasjon er også her tilnærmet lik h_{0I} .

3. Når verken den indre eller ytre sløyfe er effektiv er støypåvirkningen i lukket sløyfe lik $h_v(s)$ som i åpen sløyfe. ■

2.3 Sammenligning med seriekompensasjon

I stedet for den dynamiske tilbakekoblingen kan samme sløyfetransferfunksjon $h_{0Y}(s)$ oppnås med seriekompensasjon som vist i figur 2.7 hvor

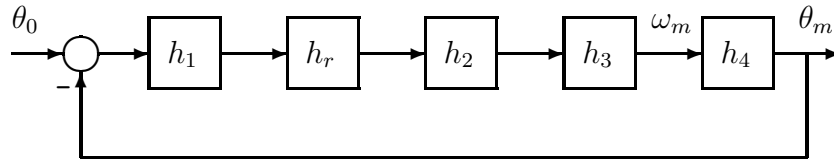
$$h_r = \frac{1}{1+h_{0I}} \approx \begin{cases} \frac{1}{h_{0I}} & \text{for } |h_{0I}| \gg 1 \\ 1 & \text{for } |h_{0I}| \ll 1 \end{cases} \quad (2.31)$$

For systemet i kapittel 2.2 er den tilsvarende h_r en PID-regulator med begrenset integral- og derivatvirkning som kan tilnærmes med

$$h_r(s) = \frac{1+Ts}{1+\beta Ts} \frac{1+T_m s}{1+\frac{1}{\beta} T_m s} \quad (2.32)$$

for passende $\beta \gg 1$. Her er det for enkelhets skyld antatt at $T_a \ll T_m/\beta$.

I serieregulatoren opptrer tidskonstanten $\beta T \gg T$, mens med dynamisk tilbakekobling er største tidskonstant T . Dette kan gi problemer for serieregulatoren i forbindelse



Figur 2.7: Seriekompensasjon

med metning hvor integralleddet kan bli meget stort, og det vil ta lang tid å lade ut integralleddet gjennom tidskonstanten βT .

En annen viktig forskjell mellom de to regulatorene er følsomheten for parameter-variasjoner. Anta at forsterkningen K_3 i motoren kan variere med en faktor på to.

1. Ved bruk av dynamisk tilbakekobling har den interne sløyfen en forsterkning proporsjonal med K_3 . Denne sløyfen har imidlertid gode stabilitetsmarginer. Den ytre sløyfen er uavhengig av K_3 i frekvensområdet hvor den interne sløyfen er effektiv. Det er i dette frekvensområdet kryssfrequensen til den ytre sløyfen ligger. Dette betyr at endringer i K_3 gir liten innvirkning på den ytre sløyfen rundt kryssfrequensen, og systemets stabilitetsmarginer er følgelig lite følsomme for endringer i K_3 så lenge den indre sløyfen er effektiv over et tilstrekkelig stort frekvensområde. Dette er illustrert i figur 2.8
2. Ved bruk av en seriekompensator vil en endring i forsterkningen føre til at kryssfrequensen endres, og systemet kan gå mot stabilitetsgrensene og bli ustabil. Dette er illustrert i figur 2.9.

2.4 Følsomhet for støy

Systemet i figur 2.1 påvirkes av støyen v . Anta at $h_v(s) = h_3(s)h_4(s)$. Støyens innvirkning på målingen betegnes y_v og er gitt av transferfunksjonen

$$\frac{y_v}{v}(s) = \frac{h_3(s)h_4(s)}{(1 + h_{0I}(s))(1 + h_{0Y}(s))} = \frac{h_3(s)h_4(s)}{(1 + h_{0I}(s))[1 + \frac{h_{0Y_u}(s)}{1 + h_{0I}(s)}]} \quad (2.33)$$

som gitt av lign. 2.28.

Når $|h_{0Y}| \gg 1$, så er

$$\frac{y_v}{v}(s) \approx \frac{h_3(s)h_4(s)}{[1 + h_{0I}(s)]h_{0Y}(s)} = \frac{h_3h_4}{h_{0Y_u}} = \frac{1}{h_1h_2} \quad (2.34)$$

siden $h_{0Y} = h_{0Y_u}/(1 + h_{0I})$ og $h_{0Y_u} = h_1h_2h_3h_4$.

Samme transferfunksjon kan oppnås med en seriekompensasjon som vist i figur 2.7 med regulatoren $h_r(s)$. Transferfunksjonen fra $v(s)$ til $y_v(s)$ blir i dette tilfelle

$$\frac{y_v}{v}(s) = \frac{h_3h_4}{1 + h_{0Y}} \approx \frac{1}{h_1h_rh_2} \quad \text{for } |h_{0Y}| \gg 1 \quad (2.35)$$

I frekvensområdet hvor den dynamiske tilbakekoblingen er effektiv må $h_r \approx 1/h_{0I}$ for å gi samme resultat med seriekompensasjon. Dermed kan lign. (2.35) skrives

$$\frac{y_v}{v}(s) \approx \frac{h_{0I}}{h_1h_2} \quad \text{for } |h_{0Y}| \gg 1 \text{ og } |h_{0I}| \gg 1 \quad (2.36)$$

Figur 2.8: Virkning av en reduksjon i forsterkningen K_3 med en faktor på 2.5 når intern tilbakekobling brukes. Den ukompenserte transferfunksjonen betegnes h_{0Y_u1} for den nominelle forsterkningen og h_{0Y_u2} for redusert forsterkning. Tilsvarende svarer h_{0I1} til nominell verdi på K_3 og h_{0I2} til den reduserte verdien. Den kompenserte sløfetransferfunksjonen er h_{0Y} . Kryssfrekvens og stabilitetsmarginer i ytre sløyfe forblir uendret siden den indre sløyfen fremdeles er effektiv omkring kryssfrekvensen i ytre sløyfe.

Dette betyr at når den interne dynamiske tilbakekoblingen er effektiv, så reduseres den uønskede innvirkningen av støyen med en faktor som er lik forsterkningen i den interne sløyfen.

Tilsvarende kan frekvensområdet hvor $|h_{0Y}| \ll 1$ og $|h_{0I}| \gg 1$ undersøkes. I dette området gjelder tilnærmelsen

$$\frac{y_v}{v}(s) = \frac{h_3 h_4}{1 + h_{0I}} \approx \frac{h_3 h_4}{h_{0I}} \quad \text{for } |h_{0Y}| \ll 1 \text{ og } |h_{0I}| \gg 1 \quad (2.37)$$

Ved bruk av en seriekompensasjon er den ytre sløyfen så godt som åpen når $|h_{0Y}| \ll 1$, og transferfunksjonen blir

$$\frac{y_v}{v}(s) \approx h_3 h_4 \quad (2.38)$$

Også her gir seriekompensasjon en faktor h_{0I} større følsomhet for støy.

Figur 2.9: Virkning av en reduksjon i K_3 med en faktor på 2.5 ved seriekompensasjon. Nominell kurve for h_{0Y} er merket '1', mens kurven med redusert K_3 er merket '2'. Det er tydelig at fasemarginen vil reduseres til en uakseptabel verdi for kurve 2.

2.5 Strømstyrt likestrømsmotor

I et styresystem for en strømstyrt likestrømsmotor er transferfunksjonene

$$h_1(s) = K_1 \quad (2.39)$$

$$h_2(s) = K_2 \quad (2.40)$$

og

$$h_4(s) = \frac{\theta_m}{\omega_m}(s) = \frac{1}{s} \quad (2.41)$$

som for en spenningsstyrt motor, mens transferfunksjonen fra pådrag til hastighet er

$$h_3(s) = \frac{\omega_m}{u}(s) = \frac{K_3}{s} \quad (2.42)$$

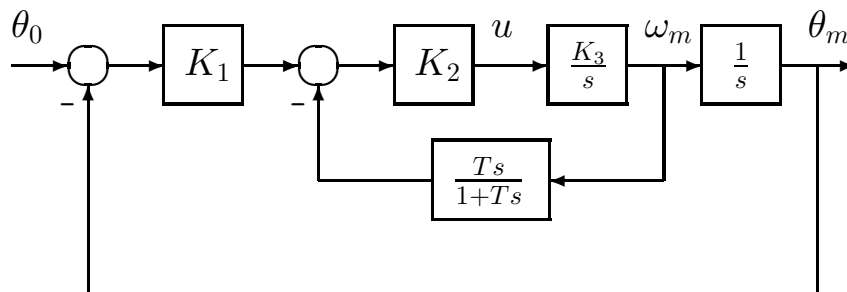
hvor $K_3 = K_T/J$. K_T er motorens momentkonstant, og J er treghetsmomentet av motor og last. Som for den spenningsstyrte motoren benyttes den dynamiske tilbakemeldingen

$$u(s) = h_2(s)[r(s) - h_d(s)\omega_m(s)] \quad (2.43)$$

i hastighetssløyfen hvor

$$h_d(s) = \frac{T s}{1 + T s} \quad (2.44)$$

og r er inngangssignalet til hastighetssløyfen. Systemet er vist i figur 2.10.



Figur 2.10: Blokkdiagram for strømstyrt likestrømsmotor med dynamisk tilbakekobling fra hastighet.

Sløyfetransferfunksjonen til den interne hastighetssløyfen blir

$$h_{0I}(s) = \frac{K_2 K_3 T}{1 + T s} \quad (2.45)$$

Det er åpenbart at den interne sløyfen er stabil for alle K_2 og alle T . I det følgende antas at $K_2 K_3 T \gg 1$. Kryssfrekvensen til $h_{0I}(j\omega)$ blir da

$$\omega_{cI} = K_2 K_3 \quad (2.46)$$

som kan utledes fra lign. (2.45).

Den ukompenserte sløyfetransferfunksjonen er i dette tilfelle

$$h_{0Y_u}(s) = \frac{K_1 K_2 K_3}{s^2} \quad (2.47)$$

som har null fasemargin uten kompensering. Med intern tilbakekobling blir sløyfetransferfunksjonen

$$h_{0Y}(s) = \frac{h_{0Y_u}(s)}{1 + h_{0I}(s)} \quad (2.48)$$

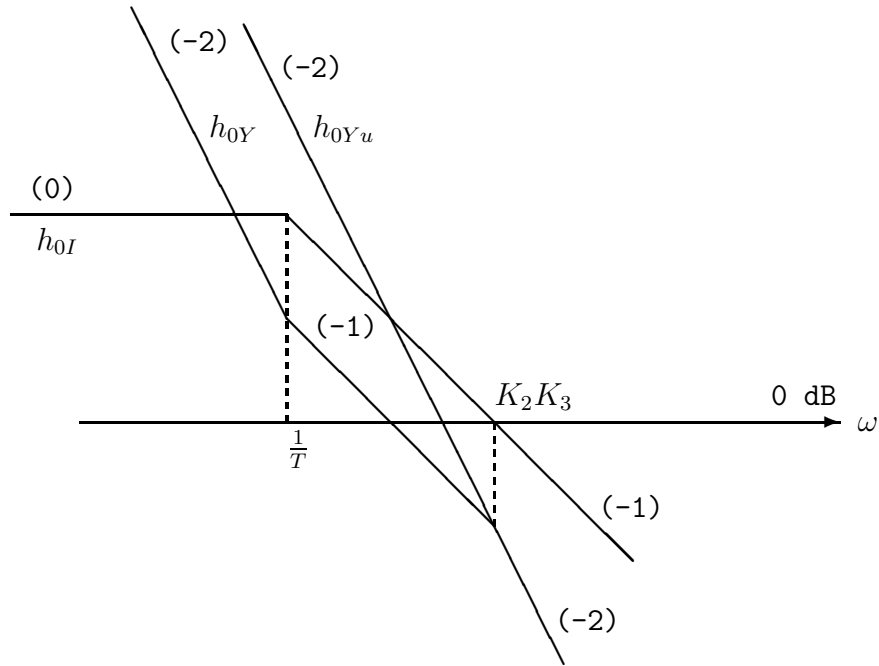
1. Hvis $|h_{0I}| \gg 1$, er den interne tilbakekoblingen effektiv, og tilnærmelsen

$$h_{0Y} \approx K_1 \frac{1 + T s}{T s} \frac{1}{s} \quad (2.49)$$

er gyldig.

2. Hvis $|h_{0I}| \ll 1$, er ikke den interne tilbakekoblingen effektiv, og sløyfetransferfunksjonen blir tilnærmet lik den ukompenserte transferfunksjonen:

$$h_{0Y}(s) \approx h_{0Y_u}(s) = \frac{K_1 K_2 K_3}{s^2} \quad (2.50)$$



Figur 2.11: Bodediagram for sløyfetransferfunksjoner for strømstyrt likestrømsmotor med dynamisk tilbakekobling fra hastigheten

Sløyfetransferfunksjonene er vist i figur 2.11

Systemet blir lite følsomt for variasjoner i forsterkningen K_3 som kan forekomme f.eks. når treghetsmomentet varierer. Årsaken til dette ses av lign. (2.49). Så lenge den interne tilbakekoblingen er effektiv er ikke $h_{0Y}(s)$ avhengig av K_3 . Den interne sløyfen er alltid stabil. Det eneste kravet som må stilles er derfor at K_3 ikke blir mindre enn at kryssfrekvensen ω_{cI} fremdeles er minst en halv dekode større enn kryssfrekvensen til den ytre sløyfen.

Anta at systemet påvirkes av et forstyrrende moment v . Transferfunksjonen fra v til målingen y i åpen sløyfe finnes å være

$$\frac{y}{v}(s) = h_v(s) = \frac{1}{Js^2} \quad (2.51)$$

Med begge sløyfene lukket reduseres støypåvirkningen til

$$\frac{y}{v}(s) = \frac{h_v(s)}{(1 + h_{0I}(s))[1 + \frac{h_{0Y_u}(s)}{1 + h_{0I}(s)}]} \quad (2.52)$$

som gitt av lign. (2.28).

1. Hvis $|h_{0Y}| \gg 1$, så gjelder tilnærmelsen

$$\frac{y}{v} \approx \frac{h_v}{h_{0Y_u}} = \frac{1}{K_1 K_2 K_3 J} \quad (2.53)$$

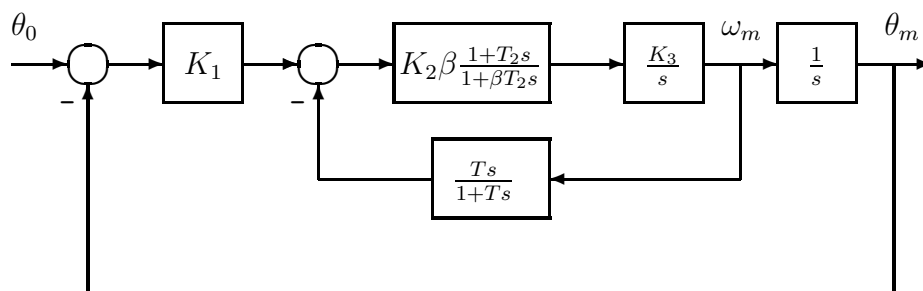
2. Hvis $|h_{0Y}| \ll 1$ og $|h_{0I}| \gg 1$, så gjelder tilnærmelsen

$$\frac{y}{v} \approx \frac{h_v}{h_{0I}} = \frac{1}{Js^2} \frac{1 + Ts}{K_2 K_3 T} \quad (2.54)$$

2.6 Integralvirkning i hastighetssløyfen

Den dynamiske tilbakekoblingen presentert i kapittel 2.5 gir begrenset integralvirkning i posisjonssløyfen. Det resulterende systemet er av type 0 med hensyn på støyen, slik at en konstant momentforstyrrelse gir et stasjonært avvik i posisjon. Dette avviket er kraftig dempet av den interne sløyfen. En ytterligere forbedring i nøyaktighet kan oppnås ved å innføre integralvirkning i hastighetssløyfen. Denne integralvirkningen gjøres vanligvis begrenset siden ubegrenset integralvirkning kan gi problemer i forbindelse med store avvik eller når det er metning.

Anta at det benyttes en begrenset PI-regulator i en intern hastighetssløyfe og en P-regulator i den ytre posisjonssløyfen (figur 2.12).



Figur 2.12: System med integralvirkning i hastighetssløyfen

Systemet er det samme som i kapittel 2.5, men regulatoren i den interne sløyfen endres til

$$h_2(s) = K_2\beta \frac{1 + T_2s}{1 + \beta T_2s} \quad (2.55)$$

hvor $\beta > 1$. Dette resulterer i

$$h_{0I}(s) = K_2\beta \frac{1 + T_2s}{1 + \beta T_2s} \frac{K_3T}{1 + Ts} \quad (2.56)$$

som er stabil for alle verdier av parameterene K_2 , T og T_2 og alle $\beta > 1$. Hvis $1/T_2 < K_2K_3$ og $\beta \gg 1$, har den interne sløyfen en fasemargin større enn 45° og kryssfrekvens

$$\omega_{cI} \approx K_2K_3 \quad (2.57)$$

2.7 Kompensering av forstyrrelser

Gitt prosessen

$$\dot{x}_1 = x_2 + v_1 \quad (2.58)$$

$$\dot{x}_2 = K_3(u + v_2) \quad (2.59)$$

hvor u er pådrag og v_1 og v_2 er forstyrrelser. Utgangen er

$$y = x_1 \quad (2.60)$$

Proessen har en regulator

$$u(s) = K_2[r(s) - h_d(s)x_2(s)] \quad (2.61)$$

$$r(s) = h_r(s)[y_0(s) - y(s)] \quad (2.62)$$

For denne prosessen skal vi studere innvirkningen av de ulike regulatorparameterene på stasjonær følsomhet for forstyrrelsene v_1 og v_2 .

Vi antar først at den dynamiske tilbakekoblingen er

$$h_d(s) = \frac{Ts}{1 + Ts} \quad (2.63)$$

og at regulatoren er

$$h_r(s) = K_1\beta_1 \frac{1 + T_1s}{1 + \beta_1 T_1s} \quad (2.64)$$

Sløyfetransferfunksjonen for den indre sløyfen er

$$h_{0I}(s) = \frac{K_2K_3(s)h_d(s)}{s} = \frac{K_2K_3T}{1 + Ts} \quad (2.65)$$

2.8 Metning i ytre sløyfe*

Ved store reguleringsavvik vil motoren gå i metning. I det følgende skal innvirkningen av metning studeres i to forskjellige tilfeller:

1. Enhets hastighetstilbakekobling og integralvirkning i posisjonssløyfen.
2. Dynamisk tilbakekobling fra hastighet og proporsjonalregulator i posisjonssløyfen.

Metoden dette skal analyseres på er at sløyfen åpnes ved punktet hvor metningen opptrer. Sløyfetransferfunksjonen sett fra dette punktet settes så opp. Av spesiell betydning er det om systemet sett fra metningen er betinget stabilt.

Vi betrakter systemet i figur 2.6. Metningen ligger mellom h_2 og h_3 , og sløyfetransferfunksjonen sett fra dette punktet er

$$g_0(s) = h_3(s)[h_d(s) + h_1(s)h_4(s)]h_2(s) \quad (2.66)$$

Anta at

$$h_2 = K_2, h_3 = h_4 = \frac{1}{s}$$

mens regulatorene h_1 og h_d skal velges. Sløyfetransferfunksjonen blir

$$g_0(s) = \frac{K_2}{s} \left[h_d(s) + \frac{h_1(s)}{s} \right] = \frac{K_2}{s^2} [sh_d(s) + h_1(s)] \quad (2.67)$$

Det går klart frem at hvis frekvensresponsen til $[sh_d(s) + h_1(s)]$ gir negativt fasebidrag for frekvenser under kryssfrekvensen, så vil systemet være betinget stabilt.

Betinget stabilitet er uheldig i dette tilfellet. Hvis systemet går i metning, vil den tilsynelatende forsterkningen i g_0 reduseres, og systemet kan bli ustabil. Dette analyseres best med teorien om beskrivende funksjoner [4], men dette ligger utenfor rammen av det som skal behandles her.

1. Anta

$$h_1(s) = K_1 \frac{1 + T_i s}{T_i s} \quad (2.68)$$

og

$$h_d(s) = 1 \quad (2.69)$$

Da er

$$g_0(s) = \frac{K_2}{s^2} \left(s + K_1 \frac{1 + T_i s}{T_i s} \right) \quad (2.70)$$

Forsterkningen K_1 vil være tilnærmet lik posisjonssløyfens kryssfrekvens: $K_1 \approx \omega_c$. Leddet $(1 + T_i s)/T_i s$ vil ha absoluttverdi større enn 1 for alle frekvenser. Dette betyr at for $\omega \ll \omega_c$ er

$$g_0 \approx \frac{K_2}{s^2} \omega_c \frac{1 + T_i s}{T_i s} \quad (2.71)$$

som har fase -270° ved lave frekvenser. Systemet beskrevet med g_0 er altså betinget stabilt. Selv om integralvirkningen gjøres begrenset, vil systemet fremdeles være betinget stabilt.

2. Anta at en dynamisk tilbakekobling brukes, og posisjonssløyfen styres med proporsjonalvirkning:

$$h_1(s) = K_1 \quad (2.72)$$

og

$$h_d(s) = \frac{T s}{1 + T s} \quad (2.73)$$

Da er

$$g_0(s) = \frac{K_2}{s^2} \left(\frac{T s^2}{1 + T s} + K_1 \right) \quad (2.74)$$

Det er åpenbart at g_0 har fase større enn -180° for alle frekvenser, og systemet beskrevet ved g_0 er derfor ikke betinget stabilt.

Konklusjonen på dette er at hvis metning opptrer i systemet, kan det oppstå stabilitetsproblemer som en følge av metningen hvis det er begrenset eller ubegrenset integralvirkning i posisjonssløyfen. En bedre løsning vil da være å bruke en dynamisk tilbakekobling fra hastigheten for å oppnå begrenset integralvirkning i posisjonssløyfen.

2.9 Implementering

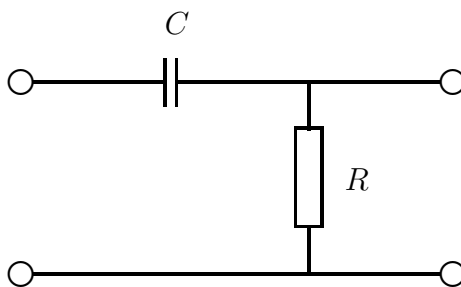
Noe av populariteten til dynamiske tilbakekoblinger av typen

$$h_d(s) = \frac{T s}{1 + T s} \quad (2.75)$$

skyldes at den kan implementeres med passive kretser med en enkel RC-krets som vist i figur 2.13. Det er dermed mulig å realisere integralvirkning kun med passive kretser. Legg merke til at

$$|h_d(j\omega)| = \frac{1}{1 + \frac{1}{(\omega T)^2}} \leq 1$$

Den dynamiske tilbakekoblingen har altså en forsterkning som er mindre eller lik 1.

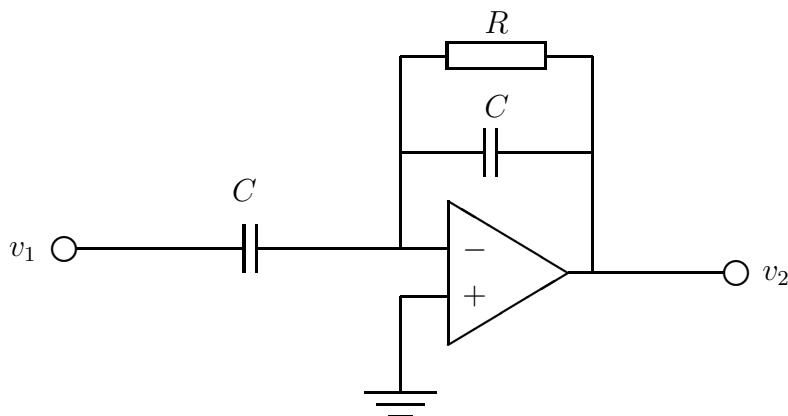


Figur 2.13: *Dynamisk tilbakekobling med passiv krets. Her er $T = RC$.*

Ved bruk av operasjonsforsterker kan h_d implementeres som vist i figur 2.14. Dette er et vanlig førsteordens høypassfilter. Transferfunksjonen er gitt av

$$\frac{v_2}{v_1}(s) = -\frac{Cs}{\frac{1}{R} + Cs} = -\frac{RCs}{1 + RCs} = -\frac{T_s}{1 + T_s s} \quad (2.76)$$

hvor $T = RC$.



Figur 2.14: *Dynamisk tilbakekobling med aktiv krets. Her er $T = RC$.*

En digital dynamisk tilbakekobling får man ved å bruke den bilineære transformasjonen

$$s = \frac{2}{T_s} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \quad (2.77)$$

hvor T_s er tastetiden og z er en kompleks variabel. Dette gir følgende transferfunksjon i z -planet:

$$h_d(z) = \frac{\frac{2T_s}{T_s}(1 - z^{-1})}{1 + \frac{2T_s}{T_s} + (1 - \frac{2T_s}{T_s})z^{-1}} \quad (2.78)$$

Vi antar at inngangen til h_d er u og utgangen er y slik at $y(s) = h_d(s)u(s)$. I z -planet er da $y(z) = h_d(z)u(z)$, slik at

$$\left(1 + \frac{2T_s}{T_s} + (1 - \frac{2T_s}{T_s})z^{-1}\right)y(z) = \frac{2T_s}{T_s}(1 - z^{-1})u(z) \quad (2.79)$$

For implementering benyttes denne ligningen hvor $y(z)$ og $u(z)$ byttes ut med henholdsvis $y(k)$ og $u(k)$ som er verdiene ved tiden $t = kT_s$ hvor k er et heltall. Videre redefineres

z^{-1} til å være tidsskiftoperatoren definert ved $z^{-1}y(k) = y(k-1)$. Dette gir

$$y(k) = \frac{\frac{2T}{T_s} - 1}{\frac{2T}{T_s} + 1}y(k-1) + \frac{\frac{2T}{T_s}}{\frac{2T}{T_s} + 1}[u(k) - u(k-1)] \quad (2.80)$$

Ved programmering av denne algoritmen beregnes koeffisientene på forhånd, og algoritmen blir

$$y(k) = c_1y(k-1) + c_2[u(k) - u(k-1)] \quad (2.81)$$

hvor c_1 og c_2 finnes av lign. (2.80).

Transferfunksjonen $h_d(s)$ har et nullpunkt for $s = 0$, som gir null utgang ved konstant inngangssignal. Dette stemmer overens med den digitale tilnærmelsen $h_d(z)$ som har et nullpunkt for $z = 1$. Den resulterende algoritmen i lign. (2.81) gir følgelig null stasjonær respons ved konstant inngangssignal.

2.10 Aktuator med dynamisk tilbakekobling

En servomotor kan inngå som aktuator i et større system. Det kan da være gunstig å bruke en dynamisk tilbakekobling på aktuatoren for å oppnå en ønsket sløyfetransferfunksjon i ytre sløyfe. Vi skal her studere et eksempel hvor en servomotor brukes som aktuator for en prosess beskrevet ved modellen

$$y(s) = h(s)u(s) \quad (2.82)$$

Pådraget u er gitt ved

$$u(s) = \frac{1}{s}u_a(s) \quad (2.83)$$

hvor $u_a(s)$ er pådraget til aktuatoren. Aktuatoren er her modellert ved en integrasjon, som er transferfunksjonen til en motor med hastighetssløyfe hvor u_a er referansen til hastighetssløyfen.

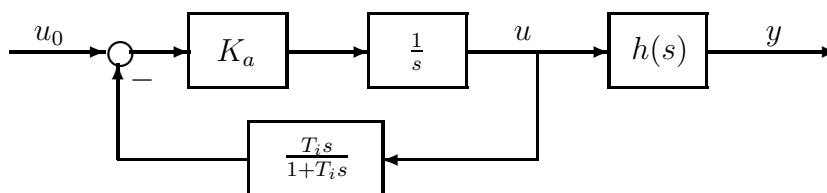
En dynamisk tilbakekobling

$$h_d(s) = \frac{T_i s}{1 + T_i s} \quad (2.84)$$

benyttes sammen med en proporsjonalregulator i aktuatorsløyfen slik at

$$u_a(s) = K_a(u_0 - h_d(s)u(s)) \quad (2.85)$$

som vist i figur 2.15. Transferfunksjonen fra u_0 til u blir



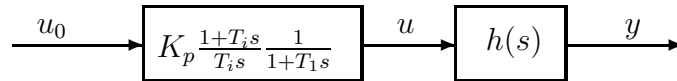
Figur 2.15: Blokkdiagram for prosess med aktuatordynamikk og dynamisk tilbakekobling for aktuator

$$\frac{u}{u_0}(s) = K_p \frac{1 + T_i s}{T_i s} \frac{1}{1 + T_1 s} \quad (2.86)$$

hvor

$$K_p = \frac{K_a}{K_a + 1/T_i} \quad \text{og} \quad T_1 = \frac{T_i}{1 + K_a T_i} \quad (2.87)$$

som vist i figur 2.16. Transferfunksjonen fra u_0 til u har dermed samme form som en PI-regulator, med unntak av tidskonstanten i T_1 . Ved å velge $1/T_1$ større enn kryssfrekvensen i ytre sløyfe oppnår man integralvirkning i ytre sløyfe.



Figur 2.16: Blokkdiagram for prosess med aktuatordynamikk og dynamisk tilbakekobling for aktuator som viser at integralvirkning oppnås som følge av den dynamiske tilbakekoblingen.

Kapittel 3

Hydrauliske servomekanismer

3.1 Innledning

Hydrauliske motorer brukes i mange anvendelser på grunn av den høye ytelsen hydrauliske motorer har i forhold til vekten av motoren. Det har vært vanlig å anta at en hydraulisk motor kan ha 10 ganger høyere ytelse enn en elektrisk motor med samme vekt. Hydrauliske motorer kan dessuten brukes i eksplosjonsfarlige omgivelser, og er egnet i krevende miljø som i sjøvann og innen luft- og romfart.

En ulempe med hydrauliske motorer er at de krever et hydraulisk aggregat, og dette gjør at minimumsprisen på et hydraulisk motorsystem blir relativt høy sammenlignet med f.eks. et elektrisk system.

3.2 Grunnlag i oljehydraulikk

I hydrauliske systemer overføres energi ved strømming av væske under trykk. Denne væsken kan ikke regnes som inkompressibel, hvilket vil si at tettheten ρ varierer med trykket p . Sammenhengen mellom tetthet og trykk er gitt av tilstandsligningen for væsken som på differensiell form skrives

$$d\rho = \left(\frac{\partial\rho}{\partial p}\right)_T dp + \left(\frac{\partial\rho}{\partial T}\right)_p dT \quad (3.1)$$

hvor p er trykk og T er temperatur. Det er vanlig å anta isoterme forhold, og man kan derfor se bort fra siste ledd i tilstandsligningen. Videre innføres væskens bulkmodul β definert ved

$$\beta = \rho \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_T \quad (3.2)$$

Av lign. (3.1) og (3.2) fås sammenhengen

$$\dot{\rho} = \frac{\rho}{\beta} \dot{p} \quad (3.3)$$

Vi kan nå sette opp massebalansen for en kompressibel væske under isoterme forhold. Massebalansen for et volum V er gitt av

$$\frac{d}{dt}(\rho V) = w_{inn} - w_{ut} \quad (3.4)$$

hvor w_{inn} og w_{ut} er massestrøm henholdsvis inn og ut av volumet V . Produktregelen for derivasjon gir

$$\dot{\rho}V + \rho\dot{V} = \rho(q_{inn} - q_{ut}) \quad (3.5)$$

hvor q_{inn} og q_{ut} er volumstrøm inn og ut av volumet. Ved å sette inn tilstandsligningen (3.3) fås massebalansen

$$\frac{V}{\beta}\dot{p} + \dot{V} = q_{inn} - q_{ut} \quad (3.6)$$

Ettersom det er små klaringer i hydraulisk utstyr, vil lekkasjestrømmen være tilnærmet laminær. Dette betyr at lekkasjestrømmen vil være proporsjonal med trykkfallet og kan skrives

$$q_{lekk} = C\Delta p \quad (3.7)$$

der q_{lekk} er lekkasjestrømmen, C er en proporsjonalitetsfaktor og Δp er trykkforskjellen.

Tradisjonelt har man brukt britiske måleenheter innen oljehydraulikk, og man må derfor regne med å finne enheter som psi (*pounds per square inch*) i tabeller for komponenter. Her konstateres at

- 1 bar = 10^5 Pa
- 1 atm = $1.01325 \cdot 10^5$ Pa
- 1 psi = 1 pound/inch² $9.81 \text{ N/kg} (39.37 \text{ inch/m})^2 / (2.20462 \text{ pound/kg}) = 6897 \text{ Pa} = 0.068 \text{ bar}$
- 1 Pa = 1 N/m²

3.3 Ventilstyrt hydraulisk motor

3.3.1 Modell av motor

En dynamisk modell for en hydraulisk motor kan utvikles fra massebalanse for væsken i motoren, og en momentbalanse for motorakslingen.

En hydraulisk motor av typen vingemotor er vist i figur 3.1. Dette er en motor med begrenset vandring siden vingen som skiller de to kamrene ikke kan passere innløp eller utløp. Det finnes også hydrauliske motorer med kontinuerlig vandring. Den dynamiske modellen blir den samme.

Det må benyttes to massebalanser: En for innstrømningskammeret og en for returkammeret:

$$\dot{V}_1 + \frac{V_1}{\beta}\dot{p}_1 = q_1 - C_{im}(p_1 - p_2) - C_{em}p_1 \quad (3.8)$$

$$\dot{V}_2 + \frac{V_2}{\beta}\dot{p}_2 = -q_2 - C_{im}(p_2 - p_1) - C_{em}p_2 \quad (3.9)$$

C_{im} er koeffisienten for intern lekkasje i motoren, dvs. lekkasje fra innstrømningskammer til returkammer. C_{em} er koeffisienten for eksternt lekkasje i motoren, dvs. lekkasje ut av motoren. For enkelhets skyld antas det at den eksterne lekkasjekoeffisienten er lik for begge kamre. β er bulkmodulen, og V_1 og V_2 er volumet i henholdsvis innstrømnings- og returkammer.

Figur 3.1: *Hydraulisk motor*

En viktig størrelse er deplasement-strømningen gitt av

$$\dot{V}_1 = -\dot{V}_2 = D_m \omega_m \quad (3.10)$$

hvor ω_m er motorens vinkelhastighet og D_m er volumendring pr. radian for kamrene. Deplasement-strømningen er således strømning som oppstår ved at motorakslingen roterer. Volumene kan uttrykkes

$$V_1 = V_0 + D_m \theta_m \quad V_2 = V_0 - D_m \theta_m \quad (3.11)$$

hvor θ_m er motorvinkelen. Ved å subtrahere den andre massebalansen fra den første fremkommer

$$2D_m \omega_m + \frac{V_0}{\beta} (\dot{p}_1 - \dot{p}_2) + \frac{D_m \theta_m}{\beta} (\dot{p}_1 + \dot{p}_2) = q_1 + q_2 - 2C_{im}(p_1 - p_2) - C_{em}(p_1 - p_2) \quad (3.12)$$

For å beskrive motoren snarere enn de to kamrene hver for seg innføres totalvolumet

$$V_t = V_1 + V_2 = 2V_0 \quad (3.13)$$

og gjennomsnittlig strømning

$$q_L = \frac{1}{2}(q_1 + q_2) \quad (3.14)$$

Videre innføres lasttrykket

$$p_L = (p_1 - p_2) \quad (3.15)$$

som er det drivende trykk i motoren. Det antas videre at motoren styres ved bruk av en servoventil. I så fall gjelder

$$p_1 + p_2 = p_s \quad (3.16)$$

hvor p_s er forsyningstrykket som er konstant. Dette medfører at

$$\dot{p}_1 + \dot{p}_2 = 0 \quad (3.17)$$

Ved å sette inn disse uttrykkene i lign. (3.12) får vi massebalansen for motoren:

$$\frac{V_t}{4\beta} \dot{p}_L = -C_{tm} p_L - D_m \omega_m + q_L \quad (3.18)$$

hvor $C_{tm} = C_{im} + \frac{1}{2}C_{em}$ er lekkasjekoeffisienten.

For å få en fullstendig modell må vi også utvikle momentbalansen for motorakslingen. Momentet fra motoren er

$$T = D_m p_L \quad (3.19)$$

hvor D_m er deplasementet til motoren. Denne ligningen er rotasjonsutgaven av kraft er lik areal ganger trykk. Den kan dessuten verifiseres ved å sette opp ligningene for mekanisk og hydraulisk effekt på motoren. For en friksjonsfri motor uten lekkasjer er mekanisk effekt ut på akslingen lik tilført hydraulisk effekt:

$$T \omega_m = p_1 \dot{V}_1 - p_2 \dot{V}_2 = p_L D_m \omega_m \quad (3.20)$$

som gir lign. (3.19).

Momentbalansen for motorakslingen er

$$J_t \dot{\omega}_m = T - T_L \quad (3.21)$$

hvor J_t er motorens treghetsmoment, og T_L er lastmomentet. Ved å sette inn for T fås

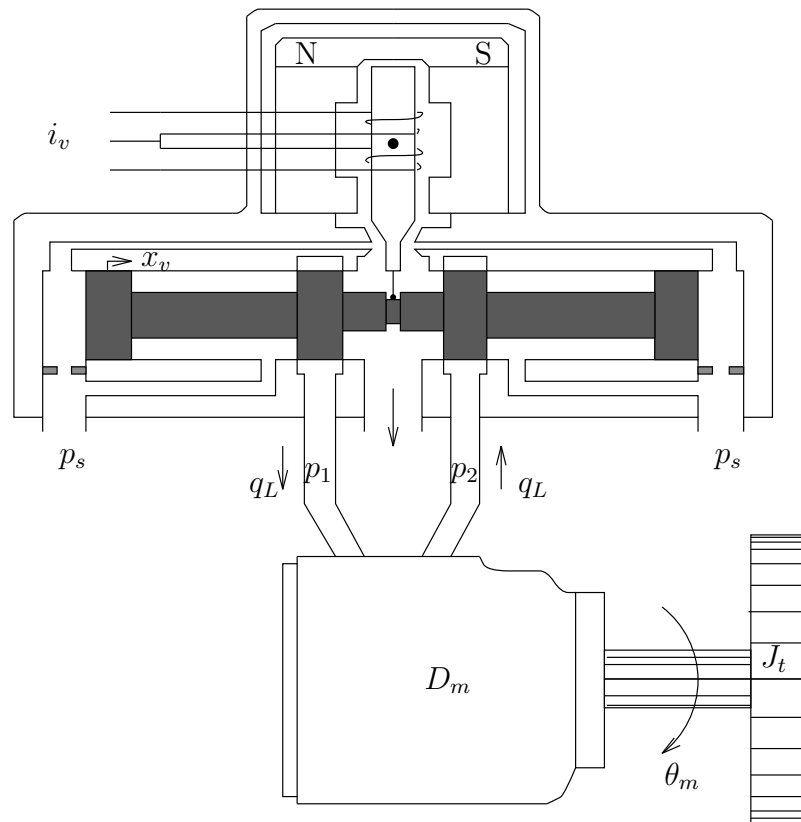
$$J_t \dot{\omega}_m = D_m p_L - T_L \quad (3.22)$$

3.3.2 Servoventiler

En hydraulisk motor styres ved hjelp av en servoventil eller en pumpe. Styring med servoventil gir den beste dynamiske ytelsen og er den vanligste løsningen for servomekanismer, mens styring med pumpe gir høyere virkningsgrad og benyttes i systemer hvor effektutnyttelse er viktig. Pumpestyrte hydrauliske motorer er beskrevet i kapittel 3.4.

De viktigste typene ventiler i servoteknikken er sleideventiler, plate-dyse ventiler og jet-ventiler. For styring av hydrauliske motorer brukes nesten utelukkende sleideventiler, mens jet-ventiler og plate-dyseventiler brukes i visse tilfeller pga. god robusthet overfor forurensninger i oljen og god funksjon (men stort effekttap) omkring nullposisjonen. Plate-dyseventiler brukes vanligvis som første trinn i en to-trinns servoventil hvor en sleideventil utgjør andretrinnet. En typisk totrinns servoventil og motor er vist i figur 3.2.

En sleideventil karakteriseres ved stempelets lengde i forhold til portåpningen. Hvis styrestempelet har samme lengde som portåpningen, sier man at ventilen har null overdekning. Hvis styrestempelet er lengre enn portåpningen sier man at ventilen har positiv overdekning, mens i motsatt fall har den negativ overdekning. Volumstrøm som en funksjon av ventilutslag er vist i figur 3.3. Det er vanligvis gunstig med null overdekning, men tilgjengelige ventiler vil vanligvis ha en viss grad av positiv eller negativ overdekning. Positiv overdekning gir samme effekt som et dødbånd, og kan resultere



Figur 3.2: Servoventil og motor

i stasjonært avvik i en servomekanisme, mens negativ overdekning gir høy forsterkning omkring null sleideposisjon og kan gi grensesvingninger.

Sammenhengen mellom trykk, sleideposisjon og volumstrøm gjennom en sleideventil kan finnes av kontinuitetsligningen og Bernoullis ligning og skrives:

$$q_L = C_d w x_v \sqrt{\frac{1}{\rho} (p_s - \text{sgn}(x_v) p_L)} \quad (3.23)$$

hvor

- C_d = utløpskoeffisient
- x_v = sleideposisjon
- $w x_v$ = strømningsareal ved hver portåpning
- p_s = forsyningstrykk
- p_L = $p_1 - p_2$ = lasttrykk

Trykk-strømningskurver som gitt av lign. (3.23) er vist på dimensjonsløs form i figur 3.4. Normalisert strømning $q_L / C_d w x_{vm} \sqrt{p_s / \rho}$ er plottet som funksjon av normalisert lasttrykk p_L / p_s med normalisert sleideposisjon x_v / x_{vm} som parameter. Kvadrant 2 og 4 er bare mulig i transienter som kan oppstå pga. lastens dynamikk. Diagrammet gir inntrykk av at det er en meget komplisert sammenheng mellom trykk, strømning og sleideposisjon. Det er imidlertid vanlig å dimensjonere et hydraulisk system slik at lasttrykket p_L er begrenset av $|p_L| < \frac{2}{3} p_s$, og i dette området er trykk-strømningskurvene tilnærmet lineære. I arbeid med regulator design for hydrauliske systemer kan man derfor i de aller fleste tilfeller betrakte systemet som lineært. Dette kommer klart frem hvis man i stedet for trykk/strømningskurvene plottet volumstrømmen som funksjon

Figur 3.3: Volumstrøm gjennom en sleideventil som funksjon av sleideposisjon for ulik grad av overdekning i ventilen.

av sleideåpningen x_v med trykket som parameter, slik det er vist i figur 3.5. Det er svært vanskelig og lite tilrådelig å bruke den ulineære modellen for å forbedre ytelse uten å risikere problemer med stabilitet.

Ventilkararakteristikken gitt av lign. (3.23) kan lineariseres:

$$q_L = K_q x_v - K_c p_L \quad (3.24)$$

hvor lineariseringskonstantene er

$$K_q = \frac{\partial q_L}{\partial x_v} = C_d w \sqrt{\frac{1}{\rho} (p_s - \text{sgn}(x_v) p_L)} \quad (3.25)$$

og

$$K_c = -\frac{\partial q_L}{\partial p_L} = \frac{C_d w x_v \sqrt{(1/\rho)(p_s - \text{sgn}(x_v) p_L)}}{2(p_s - \text{sgn}(x_v) p_L)} \quad (3.26)$$

Ved linearisering om nullpunktet $q_L = 0$, $p_L = 0$ og $x_v = 0$ fås

$$K_{q0} = C_d w \sqrt{\frac{p_s}{\rho}} \quad (3.27)$$

$$K_{c0} = 0 \quad (3.28)$$

Det viser seg at konstantene K_{q0} og K_{c0} er ventilparameterne som er avgjørende i stabilitetsanalysen av motor og ventil. K_{q0} er lett å finne ettersom C_d er gitt for en væske, og w er gradienten til portåpningen. Noe av grunnen til at ventilstyrte

Figur 3.4: Trykk-strømningskurver for en servoventil. Normalisert strømming er plottet som funksjon av normalisert lasttrykk med normalisert sleideposisjon som parameter.

hydrauliske motorer har robust stabilitet, er nettopp at systemets stabilitet avhenger av denne parameteren som er enkel å beregne.

Det er vanlig å konstruere hydrauliske servomekanismer slik at lasttrykket har absoluttverdi mindre enn to tredjedeler av forsyningstrykket under maksimal belastning. I så fall gjelder

$$|p_L| < \frac{2}{3}p_s \quad \Rightarrow \quad 0.577K_{q0} \leq K_q \leq 1.29K_{q0} \quad (3.29)$$

hvilket vil si at K_q ligger mellom $0.577K_{q0}$ og $1.29K_{q0}$. Hvis absoluttverdien av lasttrykket tillates å bli like stort som forsyningstrykket, vil K_q ligge mellom 0 og $\sqrt{2}K_{q0} \approx 1.41K_{q0}$.

Den beregnede verdien for K_c er for liten i forhold til det man finner i praktiske ventiler. En mer realistisk verdi for K_c fås ved å sette sleiden i nullstilling ($x_v = 0$) og måle lekkasjestrømmen q_{lekk} som en funksjon av lasttrykket p_L . Strømnings/trykkkoeffisienten K_{c0} finnes da som $K_{c0} = q_{lekk}/p_L$. En typisk sammenheng mellom lekkasjestrøm og sleideposisjon er vist i figur 3.6.

Figur 3.5: Normalisert strømning som funksjon av normalisert sleideposisjon med lasttrykket som parameter plottet for $p_L/p_s = 0$ (heltrukken linje), $p_L/p_s = 2/3$ (stiplet linje) og $p_L/p_s = -2/3$ (punktert linje). Så lenge $|p_L/p_s| \leq 2/3$, er strømningskurven mellom den stiplede og den punkterte linjen.

3.3.3 Ventilstyrt motor

En dynamisk modell for en ventilstyrt motor fås dermed ved å sette den lineariserte ventilkarakteristikken lign. (3.24) inn i massebalansen lign. (3.18) hvilket gir

$$\frac{V_t}{4\beta} \dot{p}_L = -K_{ce} p_L - D_m \omega_m + K_q x_v \quad (3.30)$$

$$J_t \dot{\omega}_m = -B_m \omega_m + D_m p_L - T_L \quad (3.31)$$

$$\dot{\theta} = \omega_m \quad (3.32)$$

hvor $K_{ce} = K_c + C_{tm}$ er lekkasjekoeffisienten for motor og ventil, B_m er koeffisienten for viskøs friksjon, mens θ er motorvinkelen. Blokkdiagrammet er vist i figur 3.7.

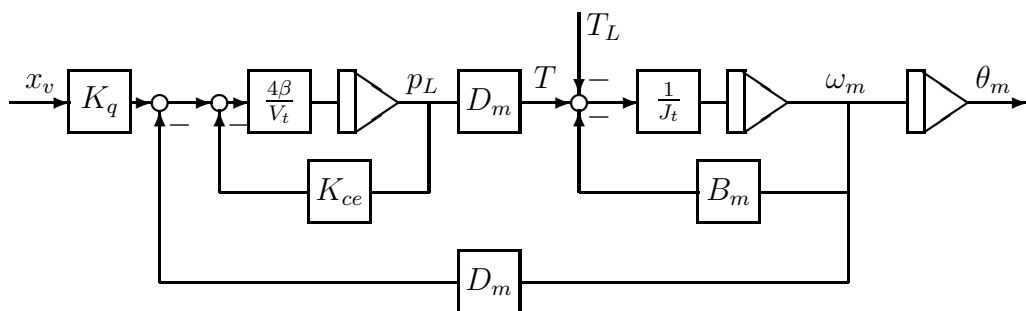
Laplacetransformasjon av modellen gir

$$\theta(s) = \frac{\frac{K_q}{D_m} x_v(s) - \frac{K_{ce}}{D_m^2} (1 + \frac{V_t}{4\beta K_{ce}} s) T_L(s)}{s \left[\frac{V_t J_t}{4\beta D_m^2} s^2 + \left(\frac{K_{ce} J_t}{D_m^2} + \frac{B_m V_t}{4\beta D_m^2} \right) s + \left(1 + \frac{B_m K_{ce}}{D_m^2} \right) \right]} \quad (3.33)$$

Her er vanligvis $\frac{B_m K_{ce}}{D_m^2} \ll 1$, og modellen kan skrives

$$\theta(s) = \frac{\frac{K_q}{D_m} x_v(s) - \frac{K_{ce}}{D_m^2} (1 + \frac{V_t}{4\beta K_{ce}} s) T_L(s)}{s \left(1 + 2\zeta_h \frac{s}{\omega_h} + \frac{s^2}{\omega_h^2} \right)} \quad (3.34)$$

Figur 3.6: Normalisert lekkasjestrøm som funksjon av normalisert sleideposisjon for typisk servoventil.



Figur 3.7: Blokkdiagram for hydraulisk motor.

hvor

$$\zeta_h = \frac{K_{ce}}{D_m} \sqrt{\frac{\beta J_t}{V_t}} + \frac{B_m}{4D_m} \sqrt{\frac{V_t}{\beta J_t}}$$

og

$$\omega_h^2 = \frac{4\beta D_m^2}{V_t J_t}$$

ω_h er den hydrauliske resonansfrekvensen, mens ζ_h er hydraulikkens relative demping.

Transferfunksjonen for systemet fra pådrag til vinkel er

$$\frac{\theta}{x_v}(s) = \frac{\frac{K_q}{D_m}}{s(1 + 2\zeta_h \frac{s}{\omega_h} + \frac{s^2}{\omega_h^2})} \quad (3.35)$$

Transferfunksjonen er vist i Bodediagrammet i figur 3.8 for $K_q/D_m = 40$, $\omega_h = 400$ rad/s og $\zeta_h = 0.1$. Transferfunksjonen fra lastmomentet, som er en forstyrrelse, til

Figur 3.8: Frekvensrespons fra ventilpådrag $x_v(s)$ til motorvinkel $\theta(s)$.

vinkelen er

$$\frac{\theta}{T_L}(s) = \frac{-\frac{K_{ce}}{D_m^2} \left(1 + \frac{V_t}{4\beta K_{ce}} s\right)}{s \left(1 + 2\zeta_h \frac{s}{\omega_h} + \frac{s^2}{\omega_h^2}\right)} \quad (3.36)$$

Transferfunksjonen i lign. (3.35) er den vanlige formen som brukes i analyse av ventilstyrte motorer, og det er derfor viktig å undersøke parameterne i transferfunksjonen.

Transferfunksjonen inneholder en ren integrasjon, hvilket betyr at motorhastigheten er proporsjonal med pådraget x_v for langsomtvarierende pådrag hvor $(1 + 2\zeta_h \frac{s}{\omega_h} + \frac{s^2}{\omega_h^2}) \approx 1$ og den hydrauliske resonansen ikke blir eksitert.

Forsterkningen K_q/D_m er ventilens strømningskonstant K_q dividert med deplase- mentet D_m . Deplasementet bestemmes meget nøyaktig for en motor, slik at variasjoner i forsterkningen skyldes utelukkende variasjoner i ventilens strømningskonstant. Hvis motorsystemet konstrueres slik at $|p_L| < \frac{2}{3}p_s$ under maksimum belastning, vil strømningskonstanten kunne reduseres med en faktor $\sqrt{p_s - p_L}/\sqrt{p_s}$ og variere mellom 57.7 % og 129 % av verdien i nullpunktet. Dette er ikke alvorlig for stabilitetsmarginene i systemet selv om forsterkningsmarginen vil bli litt mindre.

Parameteren ω_h er den hydrauliske resonansfrekvensen som skyldes samspillet mellom treghetsmomentet og elastisiteten i oljen. Den hydrauliske resonansfrekvensen begrenser båndbredden i hydrauliske servomekanismer, og er en viktig konstruksjonsparameter. Hvis man ønsker hurtig respons i systemet må ω_h være stor. Resonansfrekvensen ω_h er gitt av β , D_m og J_t . Parameterne J_t og særlig D_m kan bestemmes meget

nøyaktig, mens bulkmodulen β er noe mer usikker. Imidlertid viser det seg at hvis den hydrauliske motoren har normal driftstemperatur så vil også kompressibiliteten holde seg konstant. En verdi på $\beta = 7.0 \cdot 10^8$ Pa ($= 10^5$ psi) anbefales i [24] og ble brukt med gode resultater for de hydrauliske Trallfa-robotene.

Den relative dempingen ζ_h kan vanligvis tilnærmes med

$$\zeta_h = \frac{K_{ce}}{D_m} \sqrt{\frac{\beta J_t}{V_t}} \quad (3.37)$$

Videre viser det seg at lekkasjen i ventilen dominerer over lekkasjen i motoren, slik at $K_{ce} \approx K_c$ er en god tilnærming. For en hydraulisk robot hvor like ventiler brukes for alle motorene betyr dette at det er tilstrekkelig å finne lekkasjekonstanten til ventilen. Denne finnes ved å sette fullt lasttrykk på ventilen og måle oljestrømmen i et passende tidsintervall, f.eks. ett minutt, med et måleglass. Parameterne som bestemmer dempingen ζ_h varierer lite unntatt lekkasjekonstanten K_c som varierer kraftig med sleideutslaget. Lekkasjekonstanten er minst for null sleideutslag, og dette gir den laveste relative dempingen som vanligvis er $0.1 < \zeta_h < 0.5$. Når sleiden åpnes og hastigheten av motoren øker blir K_c vesentlig større, og den relative dempingen kan bli større enn 1. Hvis regulatoren utvikles for den minste relative dempingen som opptrer ved null sleideutslag, vil imidlertid systemet få forbedret stabilitetsmargin når ζ_h øker. Dette betyr at variasjoner i relativ demping ikke fører til stabilitetsproblemer.

Transferfunksjonen fra lastmomentet T_L til vinkelen θ som er gitt av lign. (3.36) har et nullpunkt i $4\beta K_{ce}/V_t$. Hvis man bruker tilnærmelsen for ζ_h gitt i lign. (3.37) fås

$$\frac{4\beta K_{ce}}{V_t} = 2\zeta_h \omega_h \quad (3.38)$$

som gir transferfunksjonen

$$\frac{\theta}{T_L}(s) = \frac{-\frac{K_{ce}}{D_m^2} \left(1 + \frac{s}{2\zeta_h \omega_h}\right)}{s \left(1 + 2\zeta_h \frac{s}{\omega_h} + \frac{s^2}{\omega_h^2}\right)} \quad (3.39)$$

Eksempel 3.1 Knekkfrekvensen til nullpunktet i transferfunksjonen i (3.39) er $2\zeta_h \omega_h$, som er av samme størrelsesorden som den hydrauliske resonansfrekvensen ω_h . En typisk verdi for den relative dempingen kan være $\zeta_h = 0.2$, og da er knekkfrekvensen til nullpunktet lik $0.4\omega_h$. ■

3.3.4 Ventilstyrt arbeidssylinder

En arbeidssylinder er en hydraulisk motor som gir lineær bevegelse. Den dynamiske modellen for en ventilstyrt arbeidssylinder er meget lik modellen for en ventilstyrt hydraulisk motor. Massebalansen er i dette tilfellet

$$\frac{V_t}{4\beta} \dot{p}_L = -C_{tp} p_L - A_p \dot{x}_p + q_L \quad (3.40)$$

hvor x_p er stempelets posisjon, C_{tp} er lekkasjekonstanten til arbeidssylinderen og A_p er arealet av stempelet. Kraften fra arbeidssylinderen er

$$F = A_p p_L \quad (3.41)$$

Kraftbalansen for stempelet er dermed

$$m_t \ddot{x}_p = -B_p \dot{x}_p + A_p p_L - F_L \quad (3.42)$$

hvor

m_t = massen av stempel og last

B_p = koeffisient for viskøs friksjon

F_L = kraft som virker fra lasten

Den Laplacetransformerte modellen blir

$$x_p(s) = \frac{\frac{K_q}{A_p} x_v(s) - \frac{K_{ce}}{A_p^2} (1 + \frac{V_t}{4\beta K_{ce}} s) F_L(s)}{s(1 + 2\zeta_h \frac{s}{\omega_h} + \frac{s^2}{\omega_h^2})} \quad (3.43)$$

hvor

$$\zeta_h = \frac{K_{ce}}{A_p} \sqrt{\frac{\beta m_t}{V_t}} + \frac{B_p}{4A_p} \sqrt{\frac{V_t}{\beta m_t}} \quad (3.44)$$

og

$$\omega_h^2 = \frac{4\beta A_p^2}{V_t m_t} \quad (3.45)$$

3.4 Pumpestyrt hydraulisk motor

Pumpestyrte hydrauliske motorer foretrekkes i anvendelser som krever stor effekt etter som virkningsgraden i denne type system er opptil 90 %. Dette er vesentlig mer enn for ventilstyrte motorer. Responsen i denne type system er imidlertid relativt langsom.

En pumpestyrt hydraulisk motor er vist i figur 3.9. Denne type motor kalles gjerne et hydraulisk gir. En pumpe med variabelt deplasement drives av en motor med konstant effekt. Pumpens innstrømnings og returrør er direkte koblet til en hydraulisk motor med konstant deplasement. Hastighet og rotasjonsretning av denne motoren kan dermed styres ved å variere pumpens deplasement.

Deplasementet til pumpen varieres ved hjelp av et stag, og en liten elektrohydraulisk servo brukes for å posisjonere staget.

Figur 3.9: *Pumpestyrt hydraulisk motor*

I utledningen av en dynamisk modell for en pumpestyrt hydraulisk motor er det vanlig å anta at det er drivende trykk bare i innstrømningskammeret til motoren, mens returkammeret har et lite etterforsyningstrykk p_r , som skal gi et visst minimumstrykk

for å fylle etter for olje som lekker ut. Massebalansen for innstrømningskammeret kan da skrives

$$\frac{V_0}{\beta} \dot{p}_1 = -D_m \omega_m + D_p \omega_p - C_{ip}(p_1 - p_r) - C_{ep} p_1 - C_{im}(p_1 - p_r) - C_{em} p_1 \quad (3.46)$$

hvor

- D_p = deplasement av pumpen
- D_m = deplasement av motor
- ω_p = pumpens vinkelhastighet (antatt å være konstant)
- ω_m = motorens vinkelhastighet
- V_0 = gjennomsnittlig volum av høytrykksdel
- p_1 = drivende trykk på høytrykksiden
- p_r = etterforsyningstrykk
- β = bulkmodul
- C_{ip} = koeffisient for intern lekkasje i pumpen
- C_{im} = koeffisient for intern lekkasje i motor
- C_{ep} = koeffisient for ekstern lekkasje fra pumpen
- C_{em} = koeffisient for ekstern lekkasje fra motoren

Deplasementet til pumpen er gitt av

$$D_p = k_p \phi \quad (3.47)$$

hvor

- ϕ = stagets vinkel
- k_p = $\partial D_p / \partial \phi$ (deplasementets gradient mhp. pådraget ϕ)

Uttrykket for deplasementet settes inn i massebalansen:

$$\frac{V_0}{\beta} \dot{p}_1 = -D_m \omega_m - C_t p_1 + C_{it} p_r + k_p \omega_p \phi \quad (3.48)$$

hvor $C_{it} = C_{ip} + C_{im}$ og $C_t = C_{it} + C_{ep} + C_{em}$.

Momentbalansen er gitt av

$$J_t \dot{\omega}_m = -B_m \omega_m + D_m p_1 - D_m p_r - T_L \quad (3.49)$$

hvor $J_t = J_m + J_L$ er treghetsmoment av motor og last, B_m er koeffisienten for viskøs friksjon og T_L er lastmomentet.

For den videre analyse antas etterforsyningstrykket å være konstant. Den Laplace-transformerte modellen blir

$$\theta(s) = \frac{\frac{k_p \omega_p}{D_m} \phi(s) - \frac{C_t}{D_m^2} (1 + \frac{V_0}{\beta C_t} s) T_L(s)}{s(1 + 2\zeta_h \frac{s}{\omega_h} + \frac{s^2}{\omega_h^2})} \quad (3.50)$$

hvor

$$\zeta_h = \frac{C_t}{2D_m} \sqrt{\frac{\beta J_t}{V_0}} + \frac{B_m}{2D_m} \sqrt{\frac{V_0}{\beta J_t}} \quad (3.51)$$

og

$$\omega_h^2 = \frac{\beta D_m^2}{V_0 J_t} \quad (3.52)$$

Av denne modellen finner man de to transferfunksjonene

$$\frac{\theta}{\phi}(s) = \frac{\frac{k_p \omega_p}{D_m}}{s(1 + 2\zeta_h \frac{s}{\omega_h} + \frac{s^2}{\omega_h^2})} \quad (3.53)$$

og

$$\frac{\theta}{T_L}(s) = \frac{-\frac{C_t}{D_m^2}(1 + \frac{V_0}{\beta C_t} s)}{s(1 + 2\zeta_h \frac{s}{\omega_h} + \frac{s^2}{\omega_h^2})} \quad (3.54)$$

Transferfunksjonene for en pumpestyrt hydraulisk motor har nøyaktig samme form som for en ventilstyrt motor. De vesentligste forskjellene er:

- Den hydrauliske resonansfrekvensen er lavere ettersom det bare er ett kammer som er aktivt hvilket gir en reduksjon med en faktor $1/\sqrt{2}$. Dessuten inkluderer kammervolumet V_0 rør og pumpens høytrykkside og er derfor større enn for en ventilstyrt motor.
- Forsterkningen $k_p \omega_p / D_m$ kan bestemmes nøyaktig og varierer svært lite.
- Den relative dempingen avhenger av lekkasjen til motor og pumpe, men denne lekkasjen er vesentlig mindre enn for en servoventil, og dessuten er lekkasjen mye mindre enn for en ventilstyrt motor. Dette betyr at dempingen varierer svært lite, og dessuten at den naturlige dempingen er liten. Ofte introduseres ekstra lekkasje i etterforsyningen for å oppnå en tilstrekkelig demping.

3.5 Elektrohydrauliske servomekanismer

En elektrohydraulisk servomekanisme består av en elektrohydraulisk servoventil, en hydraulisk motor eller arbeidsylinder og et hydraulisk aggregat. I tillegg har servomekanismen måleutstyr, elektronikk for sammenkobling og en regulator.

3.5.1 Forsyningstrykk

Forsyningstrykket til servomekanismen har stor innflytelse på systemets ytelse. Faktorer som influerer på valg av forsyningstrykk er:

1. Det er mange grunner for å velge et høyt forsyningstrykk. Effekten er produktet av trykk og volumstrømning. Hvis forsyningstrykket økes, kan en ønsket effekt oppnås med mindre volumstrømning. Dette betyr at man kan bruke mindre pumper, ventiler og oljereservoar, og tynnere rør kan brukes, slik at totalvekten av det hydrauliske systemet kan reduseres. Dette gjelder imidlertid bare opp til omkring 280 bar (4000 psi). Økes forsyningstrykket ytterligere vil kravet til materialstyrke resultere i økt vekt for systemet.
2. Det er også grunner for å begrense forsyningstrykket. Lekkasjene øker med forsyningstrykket og oljetemperaturen øker. Dette betyr at det stilles høyere krav til de mekaniske toleransene, og dette fører til dyrere komponenter. Akustisk støy tiltar også med trykket. Slitasjen på komponentene blir større.

På bakgrunn av dette er det vanlig å velge et forsyningstrykk på

- 35–140 bar (500–2000 psi) for industrielle systemer
- 210–280 bar (3000–4000 psi) for fly pga. vektreduksjon

ABB Trallfa Robot benytter 70 bar forsyningstrykk for sine industriroboter.

3.5.2 Virkningsgrad med servoventil

For dimensjonering av elektrohydrauliske servomekanismer er det interessant å undersøke virkningsgraden av en ventilstyrt motor. Vi tar utgangspunkt i en servoventil med karakteristikk

$$q_L = C_d w x_v \sqrt{\frac{1}{\rho} \left(p_s - \frac{x_v}{|x_v|} p_L \right)} \quad (3.55)$$

For enkelhets skyld antar vi at sleideåpningen x_v er positiv. Effekten overført til lasten er da

$$P = p_L q_L = C_d w x_v \sqrt{\frac{p_s}{\rho}} p_s \left(\frac{p_L}{p_s} \right) \sqrt{1 - \frac{p_L}{p_s}} \quad (3.56)$$

som er vist i figur 3.10. Effekten er null for $p_L = p_s$ ettersom volumstrømmen er null i dette tilfellet. Effekten er også null for $p_L = 0$. I mellom disse punktene ligger maksimal effekt. Ved å derivere uttrykket for effekten med hensyn på lasttrykket fås at maksimal effekt oppnås for

$$p_L = \frac{2}{3} p_s \quad (3.57)$$

Dette betyr maksimal effektoverføring til lasten oppnås når trykket over lasten er to tredjedeler av forsyningstrykket. I dette tilfelle er virkningsgraden

$$\eta = \frac{P_{last}}{P_{generert}} = \frac{p_L q_L}{p_s q_L} = \frac{2}{3} \quad (3.58)$$

Nå har imidlertid p_L absoluttverdi som er mindre enn $\frac{2}{3} p_s$ det meste av tiden, slik at den praktiske virkningsgraden er vesentlig lavere.

3.5.3 Elektrohydraulisk servoventil

Elektrohydrauliske servoventiler er kommersielt tilgjengelige i ulike kvaliteter og størrelser. For servomekanismer brukes totrinns servoventiler der første trinn gjerne er en plate-dyse ventil som posisjonerer andre trinn, som er en sleideventil. De viktigste krav til en servoventil er:

1. Ventilen må være dimensjonert for maksimum strømming som er forventet.
2. Strømningen q_L bør være tilstrekkelig lineær. Dette oppnås hvis overdekningen er liten slik at man unngår ulineære effekter som stasjonært avvik, som opptrer ved positiv overdekning, eller grensesvingninger, som opptrer ved negativ overdekning.
3. Lekkasjen må ikke være for stor siden dette gir effekttap og større følsomhet for forstyrrelser i servoen.
4. Servoventilens båndbredde bør være høyere enn den hydrauliske resonansfrekvensen, slik at ikke ventilen begrenser totalsystemets båndbredde.

Vanlige elektrohydrauliske servoventiler har en båndbredde på 50–100 Hz (314–628 rad/s).

Figur 3.10: Virkningsgrad for ventilstyrt motor som funksjon av normalisert lasttrykk p_L/p_s .

3.6 Elektrohydraulisk posisjonsservo

3.6.1 Transferfunksjoner

Den vanligste elektrohydrauliske servomekanisme er posisjonsservoen. Det viser seg at det er meget enkelt å utvikle en god posisjonsservo for en ventilstyrt hydraulisk motor. I de aller fleste anvendelser vil en P-regulator være den beste løsningen, og det resulterende systemet har høy ytelse og samtidig en særdeles god robusthet, hvilket betyr at systemet er stabilt med god ytelse selv om systemets parametere varierer, eller systemet utsettes for forstyrrelser.

Pådraget til systemet er strømsignalet i_v inn på servoventilen. Målingen er motorens vinkel θ som måles med resolver, kodeskive eller potensiometer.

Transferfunksjonen til servoventilen er

$$\frac{x_v}{i_v}(s) = \frac{K_s}{(1 + \frac{s}{\omega_1})(1 + \frac{s}{\omega_2})(1 + 2\zeta_0 \frac{s}{\omega_0} + \frac{s^2}{\omega_0^2})} \quad (3.59)$$

hvor K_s (m/A) er servoventilens forsterkning. Knekkfrekvensene ω_1 og ω_2 skyldes tidskonstanten i ventilens første trinn og den induktive tidskonstanten L/R i servoventilens elektriske momentmotor. Svingsystemet med resonansfrekvens ω_0 skyldes resonans fra masse/fjær-systemet i momentmotoren. Av disse faktorene er knekkfrekvensen ved ω_1

den dominerende for de fleste servoventiler ettersom ω_1 vanligvis er mindre enn ω_2 og ω_0 .

Modellen til motoren er

$$\theta(s) = \frac{\frac{K_q}{D_m} x_v(s) - \frac{K_{ce}}{D_m^2} (1 + \frac{V_t}{4\beta K_{ce}} s) T_L(s)}{s(1 + 2\zeta_h \frac{s}{\omega_h} + \frac{s^2}{\omega_h^2})} \quad (3.60)$$

3.6.2 Posisjonsregulering

En P-regulator

$$i_v = K_p(\theta_0 - \theta) \quad (3.61)$$

benyttes for posisjonsregulering. Her er θ_0 posisjonsreferensen til motoren.

Sløyfetransferfunksjonen blir

$$h_0(s) = \frac{K_v}{s(1 + \frac{s}{\omega_1})(1 + \frac{s}{\omega_2})(1 + 2\zeta_0 \frac{s}{\omega_0} + \frac{s^2}{\omega_0^2})(1 + 2\zeta_h \frac{s}{\omega_h} + \frac{s^2}{\omega_h^2})} \quad (3.62)$$

hvor forsterkningsfaktoren $K_v = K_p K_s K_q / D_m$ er hastighetskonstanten til systemet. Servoventilens dynamikk er vanligvis vesentlig raskere enn motordynamikken, og dette betyr at sløyfetransferfunksjonen kan forenkles til

$$h_0(s) = \frac{K_v}{s(1 + 2\zeta_h \frac{s}{\omega_h} + \frac{s^2}{\omega_h^2})} \quad (3.63)$$

Bodediagrammet til $h_0(s)$ er vist i figur 3.11.

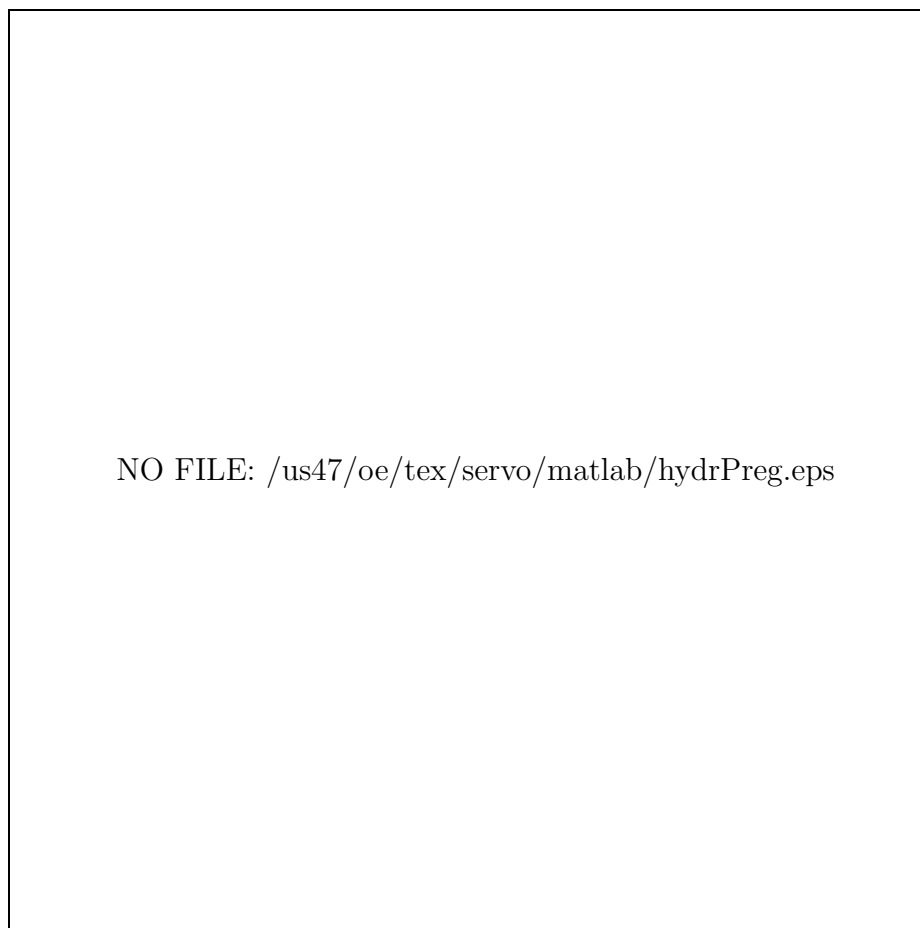
Denne sløyfetransferfunksjonen har en form som er meget vanlig innen servoteknikken. For det første inneholder $h_0(s)$ en ren integrasjon som er transformasjonen fra vinkelhastighet til vinkel. Systemet er altså av type 1 hvor sløyfeforsterkningen går mot uendelig for lave frekvenser, og dette resulterer i null stasjonært avvik for konstant referanse θ_0 . Videre har den asymptotiske amplitudekurven en vinkelkoeffisient -1 for $\omega < \omega_h$ hvor ω_h er den hydrauliske resonansfrekvensen. Anta at kryssfrekvensen oppfyller $\omega_c < \omega_h$. Av Bodediagrammet ser man at dette resulterer i sammenhengen

$$K_v \approx \omega_c \quad (3.64)$$

Bakgrunnen for betegnelsen hastighetskonstant for K_v er som følger: Anta at referansen er en rampe $\theta_0(t) = v_0 t$ hvor v_0 er ønsket hastighet og t er tiden. Fra sluttverdi-teoremet eller ved figurbetraktning finner man da at det stasjonære avvik blir

$$e(t) = \theta_0(t) - \theta(t) = v_0 / K_v \quad (3.65)$$

hvilket betyr at stasjonært avvik ved en rampe på referansen er referansehastigheten dividert på hastighetskonstanten. Av lign. (3.64) ser man at hastighetskonstanten er tilnærmet lik det lukkede systems båndbredde. Dette betyr at hvis båndbredden til systemet er begrenset av den hydrauliske resonansen, så er også hastighetskonstanten begrenset, og systemets avvik vedfølging av en rampe er direkte gitt av båndbredden gjennom lign. (3.64) og (3.65).



Figur 3.11: *Frekvensrespons $|h_0(j\omega)|$ for posisjonssløyfe med P-regulator. Hastighetskonstanten er $K_v = 40$, relativ demping er $\zeta_h = 0.1$, mens resonansfrekvensen er $\omega_h = 400$.*

For å undersøke forsterkningsmarginen til systemet konstaterer vi først at $\omega_{180} = \omega_h$. Dette sees av

$$h_0(j\omega_h) = \frac{K_v}{j\omega_h(1 + 2\zeta_h \frac{j\omega_h}{\omega_h} + \frac{j^2\omega_h^2}{\omega_h^2})} = -\frac{K_v}{2\zeta_h\omega_h}$$

som åpenbart gir en fase på -180° . Anta at kryssfrekvensen ω_c er mindre enn den hydrauliske resonansfrekvensen ω_h . Ettersom fasen til h_0 er monotont avtagende, vil det alltid være en fasemargin i systemet. Stabilitet oppnås da hvis systemet har en forsterkningsmargin hvilket vil si at $|h_0(j\omega_{180})| < 1$ (= 0dB). Dette er oppfylt for

$$K_v < 2\zeta_h\omega_h \quad (3.66)$$

som er en fundamental designregel for hydrauliske posisjonsservoer. Denne stabilitetsbetingelsen kan også finnes ved bruk av algebraiske stabilitetsbetingelser som Rouths kriterium. Vanlige verdier for den relative dempingen er omkring 0.1 til 0.2 hvilket betyr at hastighetskonstanten er begrenset til 20–40 % av den hydrauliske resonansfrekvensen. Resultatet er videre interessant ettersom det også viser at kryssfrekvensen ω_c , som ofte oppfattes som båndbredden til systemet, er tilnærmet lik hastighetskonstanten. Dette betyr at båndbredden i en elektrohydraulisk posisjonsservo vil vanligvis være begrenset til 20–40 % av den hydrauliske resonansfrekvensen.

En interessant sammenheng som fås av lign. (3.38) er

$$K_v < 2\zeta_h\omega_h = \frac{4\beta K_{ce}}{V_t} \quad (3.67)$$

Denne ligningen viser at begrensningen på hastighetskonstanten er bestemt av parameterne β som er bulkmodulen, K_{ce} som hovedsakelig er gitt av ventillekkasjen og V_t som er oljevolumet i motor, rør og ventil. Kompressibiliteten er gitt av oljen og kan vanligvis ikke endres. K_{ce} kan endres ved å øke lekkasjen i systemet. Dette gir imidlertid effekttap, og motorens følsomhet overfor lastforstyrrelser øker kraftig. Dette er vanligvis ikke ønskelig ettersom de negative effektene av en økning i lekkasje vanligvis er langt alvorligere enn den positive effekten man får pga. økt båndbredde. Dette betyr at for høykvalitets elektrohydrauliske posisjonsservoer er det oljevolumet som er den avgjørende designparameter med hensyn på oppnåelig båndbredde og hastighetskonstant. Dette ser man f.eks. for hydrauliske industriroboter hvor man gjerne bruker lik servoventil for alle motorene. Den raskeste leddservoen blir da den som har det minste oljevolumet. Av dette kan man bli forledet til å tro at man kan oppnå en hvilken som helst båndbredde ved å redusere oljevolumet. Dette er imidlertid ikke mulig ettersom motorens moment er gitt av $T = D_m p_L$, og oljevolumet i motoren er proporsjonalt med D_m . En reduksjon i oljevolumet vil medføre en reduksjon i deplasementet D_m , hvilket gir lavere maksimalt moment fra motoren. Dette problemet kan omgås ved å bruke et gir. Spesifisert moment kan da oppnås med et mindre oljevolum. Vanligvis ønsker man imidlertid å unngå bruk av gir i hydrauliske servomekanismer.

3.6.3 Varierende treghetsmoment

En motor i en industrirobot vil ha varierende treghetsmoment av lasten. Effekten av variasjoner i treghetsmomentet skal studeres i dette kapitlet.

Motorens totale treghetsmoment J_t er summen av motorens treghetsmoment og lastens treghetsmoment. Motoren vil ha konstant treghetsmoment, mens lasten kan ha varierende treghet. Dette betyr at J_t kan variere. Motorens modell er gitt av

$$\theta(s) = \frac{\frac{K_q}{D_m}x_v(s) - \frac{K_{ce}}{D_m^2}(1 + \frac{V_t}{4\beta K_{ce}}s)T_L(s)}{s(1 + 2\zeta_h\frac{s}{\omega_h} + \frac{s^2}{\omega_h^2})} \quad (3.68)$$

hvor

$$\zeta_h = \frac{K_{ce}}{D_m}\sqrt{\frac{\beta J_t}{V_t}} + \frac{B_m}{4D_m}\sqrt{\frac{V_t}{\beta J_t}}$$

og

$$\omega_h^2 = \frac{4\beta D_m^2}{V_t J_t}$$

Her er $\omega_h \propto \sqrt{\frac{1}{J_t}}$ og $\zeta \propto \sqrt{J_t}$ hvis $B_m = 0$.¹ Dette betyr at produktet $\zeta_h\omega_h$ er uavhengig av J_t , og for en posisjonsservo med P-regulator er dermed

$$|h_0(j\omega_{180})| = \frac{K_v}{2\zeta_h\omega_h} \quad (3.69)$$

uavhengig av J_t . Systemet har altså konstant forsterkningsmargin når treghetsmomentet varierer, som er et meget overraskende resultat. Bodediagram for ulike verdier av treghetsmomentet er vist i figur 3.12.

¹ \propto betyr proporsjonal med.

Figur 3.12: Bodediagram av hydraulisk posisjonservo for ulike verdier av treghetsmomentet. Kurven er plottet for fire verdier av treghetsmomentet, og det er en faktor på fire mellom de ulike verdiene på treghetsmomentet. Legg merke til at resonanstoppen er like høy for alle kurvene, hvilket betyr at forsterkningsmarginen er den samme.

Ved en svært stor økning i treghetsmomentet blir systemet sterkt overkritisk dempet, og fasemarginen vil kunne bli liten.

3.6.4 Følgeforhold

Følgeforholdet $M(s) = \frac{\theta}{\theta_0}(s)$ er interessant for å studere systemets evne til å følge en posisjonsreferanse og for å studere innvirkningen av forstyrrelser og da særlig innvirkningen av lastmomentet. Ut fra sløyfetransferfunksjonen i lign. (3.63) fås følgeforholdet

$$M(s) = \frac{h_0(s)}{1 + h_0(s)} = \frac{1}{1 + \frac{\omega_h}{K_v} \left(\frac{s}{\omega_h}\right) + 2\zeta_h \left(\frac{\omega_h}{K_v}\right) \left(\frac{s}{\omega_h}\right)^2 + \frac{\omega_h}{K_v} \left(\frac{s}{\omega_h}\right)^3} \quad (3.70)$$

hvor nevneren kan faktoriseres slik at

$$M(s) = \frac{1}{\left(1 + \frac{s}{\omega_b}\right) \left(1 + 2\zeta_{nc} \frac{s}{\omega_{nc}} + \frac{s^2}{\omega_{nc}^2}\right)} \quad (3.71)$$

Den vanlige situasjonen er at den relative hydrauliske dempingen ζ_h er mindre enn 0.5, og i dette tilfelle gjelder tilnærmelsene $\omega_b = K_v$, $\omega_{nc} = \omega_h$ og $\zeta_{nc} = \zeta_h - K_v/(2\omega_h)$.

Dette betyr at knekkfrekvensene til følgeforholdet er tilnærmet lik kryssfrekvensen og den hydrauliske resonansfrekvensen. Følgeforholdet er vist i Bodediagram i figur 3.13 for $K_v = 40$, $\omega_h = 400$ rad/s og $\zeta_h = 0.1$.

Figur 3.13: Følgeforhold for elektrohydraulisk posisjonsservo

3 dB-punktet hvor amplituden av følgeforholdet er -3 dB ($= 0.707$) er tilnærmet ved $\omega_b \approx \omega_c$. 3 dB-punktet defineres iblant som det lukkede systems båndbredde.

Det lukkede system har en resonans tilnærmet ved $\omega_{nc} \approx \omega_h$.

Båndbredden i typiske elektrohydrauliske servomekanismer er 1–10 Hz som tilsvarer 6.28 – 62.8 rad/s.

3.6.5 Følsomhet for lastmoment

Det lukkede systems følsomhet for forstyrrelser i form av et lastmoment er gitt av transferfunksjonen

$$\frac{\theta}{T_L}(s) = h_{T_L}(s)N(s) \quad (3.72)$$

hvor

$$h_{T_L} = -\frac{\frac{K_{ce}}{D_m^2}(1 + \frac{V_t}{4\beta K_{ce}}s)}{s(1 + 2\zeta_h \frac{s}{\omega_h} + \frac{s^2}{\omega_h^2})} \quad (3.73)$$

er transferfunksjonen fra forstyrrelsen T_L til målingen θ for det åpne system, og

$$N(s) = \frac{1}{1 + h_0(s)} \quad (3.74)$$

er systemets avviksforhold. Utregning gir

$$\frac{\theta}{T_L}(s) = -\frac{\frac{K_{ce}}{K_v D_m^2} (1 + \frac{V_t}{4\beta K_{ce}} s)}{(1 + \frac{s}{\omega_b})(1 + 2\zeta_{nc} \frac{s}{\omega_{nc}} + \frac{s^2}{\omega_{nc}^2})} \quad (3.75)$$

Nå er knekkfrekvensene ω_b og $\frac{4\beta K_{ce}}{V_t} = 2\zeta_h \omega_h$ tilnærmet like store, hvilket betyr at

$$\frac{\theta}{T_L}(s) \approx -\frac{K_{ce}}{K_v D_m^2} \frac{1}{1 + 2\zeta_{nc} \frac{s}{\omega_{nc}} + \frac{s^2}{\omega_{nc}^2}} \quad (3.76)$$

som er tilnærmet lik $-K_{ce}/(K_v D_m^2)$ for frekvenser opp til båndbredden. Dette betyr at for forstyrrelser i frekvensområdet opp til båndbredden, er avviket i målingen θ proporsjonalt med lastmomentet T_L . Spesielt betyr dette at ved konstant lastmoment $T_L(t) = T_{L0}$ oppstår et stasjonært avvik

$$e_s = -\frac{K_{ce}}{K_v D_m^2} T_{L0} \quad (3.77)$$

som er proporsjonalt med lekkasjen og inverst proporsjonalt med hastighetskonstanten og kvadratet av deplasementet. Legg merke til at et stasjonært avvik oppstår som følge av en konstant forstyrrelse selv om sløyfetransferfunksjonen $h_0(s)$ inneholder en ren integrasjon. Årsaken til at dette avviket ikke elimineres av integrasjonen er at forstyrrelsen kommer inn via et summeringspunkt før integrasjonen. Systemet er derfor av type 0 med hensyn på forstyrrelsen.

3.6.6 Lavpassfilter i posisjonservo

I en elektrohydraulisk posisjonservo som styres med en P-regulator vil fasemarginen ofte være vesentlig større enn 45° , mens begrensningen på kryssfrekvensens størrelse skyldes kravet om en akseptabel forsterkningsmargin. Dette indikerer at det er mulig å øke kryssfrekvensen ved å inkludere en tidskonstant, dvs. et lavpassfilter, i regulatoren.

Eksempel 3.2 Med $\omega_h = 400$ rad/s og $\zeta_h = 0.1$ og P-regulator $h_r(s) = K_v$ oppnås en forsterkningsmargin på 6 dB med $K_v = \zeta_h \omega_h = 40$. Resulterende kryssfrekvens er $\omega_c = 40$ rad/s. Dette gir

$$\angle h_0(j\omega_c) = -\pi/2 - \arctan \frac{2\zeta_h \frac{\omega_c}{\omega_h}}{1 - \frac{\omega_c^2}{\omega_h^2}} = -91^\circ$$

hvilket betyr at fasemarginen er så stor som

$$\psi = 89^\circ$$

■

En regulator

$$h_r(s) = K_v \frac{1}{1 + Ts} \quad (3.78)$$

kan være hensiktsmessig å benytte hvis den relative demping er liten, f.eks. mindre enn 0.2. Tidskonstanten kan da legges i det geometriske middel mellom $\zeta_h \omega_h$ og ω_h . Dette gir

$$\frac{1}{T} = \sqrt{\zeta_h \omega_h} \quad (3.79)$$

Velges

$$K_v = \frac{1}{T} \quad (3.80)$$

kommer kryssfrekvensen omkring $1/T$, og den resulterende fasemarginen blir litt større enn 45° , mens forsterkningsmarginen blir omkring 6 dB eller større.

Eksempel 3.3 Et system med $\omega_h = 100$ rad/s styres med følgende to regulatorer:

1. En P-regulatoren med designregelen

$$K_v = \zeta_h \omega_h \quad (3.81)$$

som gir 6 dB fasemargin. Hvis $\zeta_h \leq 0.5$ blir kryssfrekvensen $\omega_c = K_v$, og fasemarginen blir større enn 45° .

2. En P-regulator og tidskonstant som gitt av lign. (3.78) med designregelen

$$K_v = \frac{1}{T} = \sqrt{\zeta_h \omega_h} \quad (3.82)$$

Dette gir resultatene i tabellen.

ζ_h	0.01	0.05	0.1	0.2
ω_{c1} (rad/s)	1	5	10	20
ψ_1	90°	89.7°	88.8°	85°
ΔK_1 (dB)	6	6	6	6
ω_{c2} (rad/s)	7.9	18	26	39
ψ_2	52°	50°	47°	38°
ΔK_2 (dB)	23.3	13.3	8.8	4.7
$ h_{02}(j\omega_h) $ (dB)	6	6.2	6.4	6.8

Her er ω_{c1} kryssfrekvens med regulator 1, mens ω_{c2} er kryssfrekvensen ved bruk av regulator 2. Fasemargin, forsterkningsmargin og forsterkning ved ω_h er gitt for regulator 1 og 2. Det går klart frem at for $\zeta_h \leq 0.1$ gir introduksjon av en tidskonstant i regulatoren økt båndbredde med akseptable stabilitetsmarginer.

For små ζ_h er det mulig å øke båndbredden ytterligere. Eksempelvis er forsterkningsmarginen ved $\zeta_h = 0.01$ så stor som 23.3 dB. Dette vil imidlertid resultere i at forsterkningen ved ω_h vil kunne bli større enn 0 dB. Dette kan gi for stor sensitivitet for umodellerte fenomener og høyfrekvent støy.

Bodediagrammer for frekvensresponsen til sløyfetransferfunksjonen h_0 og følgeforholdet M er vist i figur 3.14 og figur 3.15.

■

Figur 3.14: Bodediagram for h_0 ved bruk av P-regulator (heltrukken linje) og P-regulator og tidskonstant (stiplet linje) for $\omega_h = 100$ rad/s og $\zeta_h = 0.01$.

3.6.7 Integralvirkning

Ved bruk av en P-regulator i en elektrohydraulisk posisjonservo oppstår et stasjonært avvik ved følging av en rampe, og dette avviket er lik hastigheten dividert med hastighetskonstanten (lign. 3.65). I visse tilfeller vil man være interessert i å redusere dette avviket. Dette kan gjøres ved å innføre integralvirkning.

Ren integralvirkning for denne type system er ikke ønskelig ettersom dette vil resultere i en fase på -180° ved lave frekvenser. Dette betyr at systemet blir betinget stabilt, og dette kan gi problemer med grensesvingninger og ustabilitet ved store avvik.

Løsningen er å bruke begrenset integralvirkning (*lag-lead*). Regulatoren er da

$$h_r(s) = K_p \beta \frac{1 + T_i s}{1 + \beta T_i s} \quad (3.83)$$

hvor T_i er integraltiden, og β er forholdet mellom polens og nullpunktets knekkfrekvenser. Et typisk valg er $\beta = 10$. Bodediagram for en hydraulisk posisjonservo med begrenset integralvirkning er vist i figur 3.16 Med integralvirkningen fås en ny hastighetskonstant $K_{vc} = \beta K_v = \beta \omega_c$. Forsterkningen ved frekvenser under $(\beta T_i)^{-1}$ økes med en faktor β , og det stasjonære avviket ved følging av en rampe blir

$$e(t) = v_0 / K_{vc} \quad (3.84)$$

Figur 3.15: Bodediagram for følgeforholdet M ved bruk av P -regulator (heltrukken linje) og P -regulator og tidskonstant (stiplet linje) for $\omega_h = 100 \text{ rad/s}$ og $\zeta_h = 0.01$.

hvilket betyr at avviket reduseres med en faktor β .

Man skal imidlertid være forsiktig med å bruke integralvirkning, også begrenset integralvirkning, i posisjonsservoer. Det er allerede nevnt at systemet blir betinget stabilt med ren integralvirkning, og dette gir problemer i kombinasjon med ulinære effekter som metning, dødbånd og overdekning i servventilen. Videre vil bruk av både begrenset og ubegrenset integralvirkning ha en tendens til å gi en merkbar resonans i følgeforholdet omkring kryssfrekvensen, slik at hvis referansen inneholder frekvenskomponenter omkring båndbredden vil systemet kunne ha betydelig oversving og kvaliteten på følgingen kan forverres betydelig i forhold til ren proporsjonalregulering. Med en referanse som er en ren rampe med konstant hastighet, er det fornuftig å bruke en begrenset integralvirkning. Hvis man imidlertid har en referanse som består av ramper med ulik hastighet, vil integralvirkning resultere i betydelige oversving ved overgang fra en rampe til en annen.

3.6.8 Elektrohydraulisk hastighetservo

For de fleste motortyper og særlig for elektriske motorer benyttes vanligvis en hastighetsløyfe som en intern løyfe i en posisjonsservo. Hensikten med dette er å få høyere kvalitet på styringen ved å utnytte en hastighetsmåling til tilbakekobling. Dette er ikke vanlig i elektrohydrauliske servomekanismer.

Figur 3.16: Bodediagram av hydraulisk posisjonsservo med begrenset integralvirkning.

Det forekommer imidlertid at hastigheten er den primære størrelse som man ønsker å styre.

Transferfunksjonen for systemet er

$$\frac{\omega_m}{i_v}(s) = \frac{K_1}{1 + 2\zeta_h \frac{s}{\omega_h} + \frac{s^2}{\omega_h^2}} \quad (3.85)$$

og Bodediagrammet er vist i figur 3.17.

For å få en akseptabel fase og forsterkningsmargin må integralvirkning brukes og kryssfrekvensen må legges under ω_h . Dette gir akseptabel forsterkning ved lave frekvenser, og god fase- og forsterkningsmargin. I dette tilfelle kan både begrenset og ubegrenset integralvirkning benyttes, unntatt hvis hastighetssløyfen er en indre sløyfe i en posisjonsservo. I dette tilfellet vil ubegrenset integralvirkning gi betinget stabilitet i posisjonssløyfen hvilket er uønsket. Her skal begrenset integralvirkning studeres. En god regulator er

$$h_r(s) = \frac{K_p}{1 + T_r s} \quad (3.86)$$

som gir sløyfetransferfunksjonen

$$h_0(s) = \frac{K_0}{(1 + T_r s)(1 + 2\zeta_h \frac{s}{\omega_h} + \frac{s^2}{\omega_h^2})} \quad (3.87)$$

Figur 3.17: Bodediagram av hastighetssløyfe uten regulator.

Forsterkningen ved lave frekvenser er K_0 , og denne forsterkningen vil være gitt av spesifikasjonene på servoen. Tidskonstanten T_r er da gitt av kryssfrekvensen

$$T_r = \frac{K_0}{\omega_c} \quad (3.88)$$

Sløyfetransferfunksjonen er vist i figur 3.18.

Det er ikke mulig å oppnå gode resultater med P eller PD-regulering for denne type prosess. Med P-regulator $h_r(s) = K_p$ må $K_0 = K_p K_1$ velges mindre enn 1 for å oppnå fasemargin, og dette betyr at forsterkningen ved lave frekvenser er mindre enn 1. Dette vil i praksis si at tilbakekoblingen er så svak at den ikke gir noen virkning. Ut fra transferfunksjonen ser det ut til at en PD-regulator med kryssfrekvens $\omega_c > \omega_h$ er en mulig løsning. I praksis er ikke dette noen god løsning ettersom en endring i ω_h vil ødelegge stabilitetsmarginene. Dessuten setter det for store krav til servoventilens båndbredde som må være vesentlig større enn kryssfrekvensen, som igjen må være vesentlig større enn den hydrauliske resonansfrekvensen, for at tilbakekoblingen skal ha stor nok forsterkning ved lave frekvenser.

3.6.9 Trykktilbakekobling

Hvis et hydraulisk system har for liten relativ demping, kan dempingen forbedres ved å benytte trykktilbakekobling. Dette kan implementeres som en indre sløyfe i en posisjonsservo, eller trykket kan være den primære variabel som skal reguleres.

Figur 3.18: Bodediagram av sløyfetransferfunksjon for hastighetsløyfe med begrenset integralvirkning. Forsterkningen for lave frekvenser er valgt som $K_0 = 100$

Trykket er gitt ved

$$p_L(s) = \frac{\frac{K_q J_t}{D_m^2} s x_v(s) - \frac{1}{D_m} T_L(s)}{1 + 2\zeta_h \frac{s}{\omega_h} + \frac{s^2}{\omega_h^2}} \quad (3.89)$$

og Bodediagrammet er vist i figur 3.19.

Trykktilbakekobling brukes i to forskjellige tilfeller:

1. Et hydraulisk system kan benyttes for fast posisjonering av en last. Denne type system har ikke nødvendigvis noen posisjonsmåling og ingen posisjonstilbakekobling, og betraktes ikke som en posisjonsservo. Trykktilbakekobling benyttes i denne type systemer for å redusere den hydrauliske resonansen. I dette tilfelle benyttes en P-regulator

$$x_v(t) = K_p(p_{L0} - p_L) \quad (3.90)$$

Forsterkningen K_p er meget sterkt begrenset av ventilen i dette tilfelle siden kryssfrekvensen må være mindre enn ventilens knekkfrekvens. Reduksjonen av resonansen vil derfor være relativt liten — kanskje en faktor på 2 til 10.

2. Det kan være interessant å bruke trykktilbakekobling i en indre sløyfe for derigjennom å kunne styre motormomentet $T = D_m p_L$ slik at den hydrauliske motoren

får en karakteristikk som ligner på en strømstyrt likestrømsmotor [13]. Det er et åpent spørsmål om dette er hensiktsmessig eller ikke, men regulatoren som må benyttes er en PI-regulator

$$h_r(s) = K_p \frac{1 + T_i s}{T_i s} \quad (3.91)$$

hvor integraltiden ideelt velges omkring $T_i = \frac{1}{\omega_n}$. Integralvirkningen må inkluderes for å få en effektiv tilbakekobling ved lave frekvenser. Igjen er problemet at kryssfrequensen for trykksløyfen må være mindre enn servoventilens knekkfrekvens, og dette vil begrense forsterkningen og dermed kvaliteten av trykksløyfen. I de aller fleste elektrohydrauliske servomekanismer er parameterne valgt slik at den hydrauliske resonansfrekvensen ligger omkring en dekode under servoventilens knekkfrekvens, og dette betyr at det er vanskelig å implementere en virkelig god trykksløyfe.

En proporsjonal trykktilbakekobling har samme virkning på det hydrauliske systemet som en økning av lekkasjen. Dette gir større relativ demping og mindre resonans, mens følsomheten for lastmomentet øker.

Utstrakt eksperimentering med bruk av trykktilbakekobling i indre sløyfe i en elektrohydraulisk posisjonsservo av god kvalitet har vist at det er mulig å doble båndbredden, men samtidig blir systemet vesentlig mer følsomt for forstyrrelser fra lastmomentet.

Figur 3.19: Bodediagram av trykksløyfe uten regulator.

3.7 MATLAB-eksempler

Transferfunksjonen i figur 3.8 genereres av kommandoene

```
k = 40; zeta=0.1; omega = 400; omega2 = omega*omega;
t = k*omega2;
n = [1 2*zeta*omega omega2 0];

w = logspace(0,3,500);
[mag,phase]=bode(t,n,w);
loglog(w,mag,'-',[1 1000],[0.5 0.5],'--')
xlabel('w'),hold on
plot([0 3],[0 0]),ylabel('amplitude'),hold off
```

Følgeforholdet i figur 3.13 er generert av

```
k = 40; zeta=0.1; omega = 400; omega2 = omega*omega;
t = [0 0 0 k*omega2];
n = [1 2*zeta*omega omega2 0];

w = logspace(0,3,500);
[mag,phase]=bode(t,t+n,w);

clg, subplot(211)
semilogx(w,20*log10(mag),'-',[1 1000],[0 0],'--')
grid,xlabel('w'),ylabel('amplitude(DdB)')
if phase(1) > 0, phase = phase-360;end
semilogx(w,phase,'-',w,-90*ones(w),'--')
grid,xlabel('w'),ylabel('fase')

subplot(111);
```

Hastighetsløyfens transferfunksjon i figur 3.18 er generert av

```
k = 40; zeta=0.1; omega = 400; omega2 = omega*omega;
t = k*omega2;
n = [1 2*zeta*omega omega2];
t = 100*omega2;
n = conv(n,[1/0.4 1]);
```

```
w = logspace(-1,3,500);
[mag,phase]=bode(t,n,w);
loglog(w,mag),xlabel('w'),ylabel('amplitude'),hold on
loglog(w,ones(w))

loglog([0.1 1],[100 100])
plot([0 0],[-3 2])

w = logspace(log10(0.4),log10(400),500);
t = 100*0.4;
n = [1 0];
[mag,phase]=bode(t,n,w);
loglog(w,mag)

w = logspace(log10(400),3,500);
t = k*omega2;
n = [1 0 0 0];
[mag,phase]=bode(t,n,w);
loglog(w,mag),hold off

gtext('0 dB')
gtext('(-1)')
```


Kapittel 4

Rotkurvemethoden

4.1 Innledning

Ved analyse og design av regulatorer for lineære dynamiske systemer er det tre sentrale begreper som må undersøkes: Stabilitet, transiente egenskaper og stasjonær ytelse av det lukkede system. Stabilitet kan undersøkes med algebraiske kriterier som Rouths eller Hurwitz kriterier. Frekvensanalytiske metoder som utnytter Bodediagram, Nicholsdiagram eller Nyquistdiagram er velegnet for å studere stabilitet og stasjonær ytelse, og til en viss grad transient respons.

De transiente egenskaper for et lukket system beskrives med stigetid, oversving, relativ demping og innsvingningstid. Dette er parametre som er gitt av plasseringen av polene til det lukkede systemet. Det er derfor interessant å kunne studere polenes plassering som en funksjon av systemets parametre, og spesielt forsterkningens innflytelse på polplasseringen. En systematisk metode for dette er rotkurvemethoden [10, 14, 22].

4.2 Rotkurver

Ytelsen til et følgesystem er beskrevet av følgeforholdet

$$M(s) = \frac{y}{y_0}(s) = \frac{h_0(s)}{1 + h_0(s)} \quad (4.1)$$

hvor $y_0(t)$ er systemets referanse, $y(t)$ er målingen og $h_0(s)$ er systemets sløyfetransferfunksjon. Røttene til det karakteristiske polynomet $1 + h_0(s)$ bestemmer modiene i systemets respons.

Røttene finnes av

$$1 + h_0(s) = 0 \Leftrightarrow h_0(s) = -1 \quad (4.2)$$

Sløyfetransferfunksjonen er kompleks, og kan beskrives med absoluttverdi og fase. Ligningen for røttene kan derfor skrives

$$|h_0(s)| = 1 \quad \text{og} \quad \angle h_0(s) = 180^\circ \pm k \cdot 360^\circ \quad (4.3)$$

for $k \in \{0, 1, 2, 3, \dots\}$.

$h_0(s)$ kan generelt skrives

$$h_0(s) = \frac{K(s+z_1)(s+z_2)\dots(s+z_{n_z})}{(s+p_1)(s+p_2)\dots(s+p_{n_p})} \quad (4.4)$$

hvor $n_z \leq n_p$.

Alternativt kan $h_0(s)$ skrives med like mange nullpunkter som poler på formen

$$h_0(s) = \frac{\tilde{K}(1+\frac{s}{z_1})(1+\frac{s}{z_2})\dots(1+\frac{s}{z_{n_p}})}{(1+\frac{s}{p_1})(1+\frac{s}{p_2})\dots(1+\frac{s}{p_{n_p}})} \quad (4.5)$$

hvor forsterkningen er

$$\tilde{K} = K \frac{z_1 z_2 \dots z_{n_z}}{p_1 p_2 \dots p_{n_p}} \quad (4.6)$$

og

$$|z_{n_z+1}| = |z_{n_z+2}| = \dots = |z_{n_p}| = \infty \quad (4.7)$$

betegnes som nullpunkter i uendelig.

Her skal uttrykket i lign. (4.4) benyttes. Ligningene for røttene kan skrives

$$|h_0(s)| = \frac{|K||s+z_1||s+z_2|\dots|s+z_{n_z}|}{|s+p_1||s+p_2|\dots|s+p_{n_p}|} = 1 \quad (4.8)$$

og

$$\begin{aligned} \angle h_0(s) &= \angle(s+z_1) + \angle(s+z_2) + \dots + \angle(s+z_{n_z}) \\ &\quad - \angle(s+p_1) - \angle(s+p_2) - \dots - \angle(s+p_{n_p}) \\ &= 180^\circ \pm k \cdot 360^\circ \end{aligned} \quad (4.9)$$

for $k \in \{0, 1, 2, 3, \dots\}$. Ut fra disse ligningene kan røttenes plassering i det komplekse plan plottes som en funksjon av forsterkningen K . Kurvene som viser røttenes posisjon når K varierer fra 0 til ∞ er systemets rotkurver med hensyn på forsterkningen. Kurvenes form finnes av ligningen for vinklene, mens lign. (4.6) gir verdien av K for et punkt på rotkurven som

$$|K| = \frac{|s+p_1||s+p_2|\dots|s+p_{n_p}|}{|s+z_1||s+z_2|\dots|s+z_{n_z}|} \quad (4.10)$$

Dette skal demonstreres for et andreordens system.

Eksempel 4.1 Gitt systemet

$$y(s) = \frac{K_1}{s(s+a)}u(s) \quad (4.11)$$

hvor a er reell og positiv. Systemet har regulatoren

$$u(t) = K_p(y_0(t) - y(t)) \quad (4.12)$$

Den resulterende sløyfetransferfunksjonen er

$$h_0(s) = \frac{K}{s(s+a)} \quad (4.13)$$

hvor $K = K_1 K_p$. Systemets karakteristiske ligning er

$$1 + h_0(s) = 1 + \frac{K}{s(s+a)} = 0 \quad (4.14)$$

mens det karakteristiske polynom er

$$q(s) = s^2 + as + K = s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2 = 0 \quad (4.15)$$

som har røtter

$$s_{1,2} = -\zeta\omega_0 \pm \omega_0\sqrt{\zeta^2 - 1} \quad (4.16)$$

hvor $\omega_0 = \sqrt{K}$ og $\zeta = a/(2\sqrt{K})$.

Ligningene for røttene kan skrives

$$|h_0(s)| = \left| \frac{K}{s(s+a)} \right| = 1 \quad (4.17)$$

som gir

$$|K| = |s||s+a| \quad (4.18)$$

Dette uttrykket har en geometrisk tolkning som er meget nyttig. Uttrykket $|s|$ er lengden av en vektor fra origo til punktet s i det komplekse plan, mens $|s+a|$ er lengden av en vektor fra $-a$ til s .

Betingelsen på fasen til $h_0(s)$ blir

$$\angle h_0(s) = -\angle s - \angle(s+a) = 180^\circ \pm k \cdot 360^\circ \quad (4.19)$$

for $k \in \{0, 1, 2, \dots\}$. Denne betingelsen er oppfylt på linjestykket mellom origo og $-a$, og på linjen $s = -\frac{a}{2} + j\omega$, $\omega \in (-\infty, \infty)$. For $K = a^2/4$ ligger begge polene i $-a$. For $K < a^2/4$ ligger polene på den reelle akse mellom origo og $-a$, mens for $K > a^2/4$ er polene komplekskonjugert med realverdi $-a/2$. Rotkurvene er vist på figur 4.1.

Rotkurvene finnes fra betingelsen på fasen, mens forsterkningen for en spesiell pol s_1 finnes av $K = |s_1||s_1+a|$.

Det er også mulig å finne rotkurvene når K er konstant og a varierer. Det karakteristiske polynom

$$q(s) = s^2 + as + K = 0 \quad (4.20)$$

divideres med $s^2 + K$ slik at parameteren a opptrer på samme måte som K i lign. (4.14):

$$1 + \frac{as}{s^2 + K} = 0 \quad (4.21)$$

Betingelsen på absoluttverdien blir

$$\frac{a|s|}{|s^2 + K|} = 1 \quad (4.22)$$

mens fasen skal oppfylle

$$\angle s - \angle(s + j\sqrt{K}) - \angle(s - j\sqrt{K}) = 180^\circ \pm k \cdot 360^\circ \quad (4.23)$$

I dette tilfelle er det ikke fullt så enkelt å finne rotkurvene, men det er klart at for $a = 0$ er polene $s_{1,2} = \pm j\sqrt{K}$, for $a = 2\sqrt{K}$ er systemet kritisk dempet med sammenfallende poler i $s_{1,2} = -\sqrt{K}$. Når $a \rightarrow \infty$ ligger begge polene på den reelle akse. Den ene går til origo, mens den andre går til $-\infty$. Kurven kan plottes med et egnet beregningsprogram som f.eks. `rlocus` i MATLAB. Resultatet er vist i figur 4.2 for $a > 0$ og $K = 2$. ■

Figur 4.1: Rotkurver for $K > 0$ for $s^2 + as + K = 0$ plottet for $a = 2$.

4.3 Rotkurvemethoden

Dette kapitlet inneholder en systematisk presentasjon av rotkurvemethoden. Metoden tar utgangspunkt i den karakteristiske ligningen

$$1 + h_0(s) = 0 \quad (4.24)$$

Første trinn i metoden er å formulere den karakteristiske ligningen slik at parameteren K som skal varieres opptrer multiplikativt som i

$$1 + Kh(s) = 0 \quad (4.25)$$

hvor $h(s)$ ikke er en funksjon av K .

Dernest faktoriseres $h(s)$ i faktorer med poler og nullpunkt:

$$1 + K \frac{\prod_{i=1}^{n_z} (s + z_i)}{\prod_{i=1}^{n_p} (s + p_i)} = 0 \quad (4.26)$$

Rotkurvene fås når polene plottes i det komplekse plan for

$$-\infty \leq K \leq \infty \quad (4.27)$$

Vanligvis er man interessert i rotkurvene for positive K .

4.3.1 Punkter hvor $K = 0$

Teorem 4.1 Punkter på rotkurvene som tilsvarende $K = 0$ er polene til $h(s)$.

Figur 4.2: Rotkurver for systemet $s^2 + as + K = 0$ når a er positiv og varierer og $K = 2$

Dette vises ved å skrive om lign. (4.26) til

$$\prod_{i=1}^{n_p} (s + p_i) + K \prod_{i=1}^{n_z} (s + z_i) = 0 \quad (4.28)$$

som er systemets karakteristiske ligning. Hvis $K = 0$, er røttene til den karakteristiske ligningen lik p_i , $i \in \{1, 2, \dots, n_p\}$ som er polene til $h(s)$. ■

4.3.2 Punkter hvor $K = \pm\infty$

Teorem 4.2 Punkter på rotkurvene som tilsvarende $K = \pm\infty$ er nullpunktene til $h(s)$.

Dette vises ved å la $K \rightarrow \pm\infty$ i den karakteristiske lign. (4.28). Røttene til ligningen blir da z_i , $i \in \{1, 2, \dots, n_p\}$ som er nullpunktene til $h(s)$, hvorav $n_p - n_z$ er nullpunkter i uendelig. ■

En konsekvens av teorem 4.1 og 4.2 er:

Rotkurvene til den karakteristiske ligningen $1 + Kh(s) = 0$ begynner i polene til $h(s)$ og slutter ved nullpunktene til $h(s)$ når K går fra null til uendelig.

For de fleste systemer vil $h(s)$ ha nullpunkter i uendelig, og i så fall vil en eller flere av røttene til den karakteristiske ligningen gå til uendelig når $K \rightarrow \infty$.

4.3.3 Antall forgreninger av rotkurvene

En forgrening av rotkurvene er kurven for en av røttene når K varierer fra null til uendelig.

Teorem 4.3 Antall forgreninger av rotkurvene er lik ordenen på det karakteristiske polynom.

Dette må være oppfylt siden antall forgreninger er lik antall røtter i den karakteristiske ligningen. ■

4.3.4 Symmetri av rotkurvene

Teorem 4.4 Anta at K går fra $-\infty$ til $+\infty$. Rotkurvene vil da være symmetriske om den reelle akse. Videre vil rotkurvene være symmetriske med hensyn på symmetriaksene i pol- nullpunkt konfigurasjonen for $h(s)$.

Det forutsettes at den karakteristiske ligning har reelle koeffisienter. Symmetrien om den reelle akse er innlysende siden polene til $h(s)$ må være reelle eller de må forekomme i komplekskonjugerte par. Symmetrien om en vilkårlig symmetriakse i pol-nullpunkt konfigurasjonen forklares som følger: Hvis polene og nullpunktene til $h(s)$ er symmetriske med hensyn på en annen akse i tillegg til den reelle akse, så kan denne aksens betraktes som om den var den reelle aksens til et nytt komplekst plan som fremkommer ved en lineær transformasjon. ■

Eksempel 4.2 Gitt den karakteristiske ligningen

$$s(s+1)(s+2) + K = 0 \quad (4.29)$$

som overføres til standard form

$$1 + \frac{K}{s(s+1)(s+2)} = 0 \quad (4.30)$$

Rotkurvene for $K \in (-\infty, +\infty)$ er vist i figur (4.3). Systemet har tre nullpunkter i uendelig som er røttene for $K = \pm\infty$. For $K = 0$ ligger røttene i $s = 0$, $s = -1$ og $s = -2$. Kurvene er symmetriske om den reelle akse og om aksens $\text{Re}[s] = -1$. ■

Eksempel 4.3 Hvis polene og nullpunktene til $h(s)$ ligger symmetrisk med hensyn på et punkt i det komplekse plan, er rotkurvene for $K \in (-\infty, +\infty)$ symmetriske om dette punktet. Dette illustreres av rotkurvene for

$$s(s+2)(s^2+2s+2) + K = 0 \quad (4.31)$$

som er vist i figur 4.4. Her er rotkurvene markert med punkter. Ved bruk av `rlocus` i MATLAB under UNIX oppstår problemer med divisjon med null i symmetripunktet. ■

Figur 4.3: Rotkurver for $s(s+1)(s+2) + K = 0$ når $K \in (-\infty, +\infty)$. Legg merke til symmetrien om den reelle akse og aksene $\operatorname{Re}[s] = -1$.

4.3.5 Asymptoter til rotkurvene

Hvis tellerpolynomiet i $h(s)$ har lavere orden enn nevnerpolynomiet, har systemet nullpunkter i uendelig. Når $K \rightarrow \pm\infty$, går rotkurvene mot nullpunktene, og for systemer med nullpunkter i uendelig vil dermed noen av forgreningene til rotkurvene gå til uendelig. Det er interessant å finne asymptotene for kurvene som går til uendelig, dvs. når $|s| \rightarrow \infty$.

Anta at $h(s)$ har tellerpolynom av orden n_z og nevnerpolynom av orden n_p hvor $n_p - n_z \geq 0$. $h(s)$ har i så fall $n_p - n_z$ nullpunkter i uendelig.

Teorem 4.5 Anta at $n_p > n_z$. For store verdier av $|s|$ er rotkurvene for $K \in [0, +\infty)$ asymptoter med vinkler relativt til den reelle akse gitt av

$$\theta_k = \frac{(2k+1)\pi}{n_p - n_z} \quad (4.32)$$

for $k \in \{0, 1, 2, \dots, n_p - n_z - 1\}$

Rotkurvene for $K \in (-\infty, 0]$ har asymptoter med vinkler

$$\theta_k = \frac{2k\pi}{n_p - n_z} \quad (4.33)$$

for $k \in \{1, 2, \dots, n_p - n_z - 1\}$

Dette vises som følger: Rotkurven finnes av ligningen for vinklene

$$\sum_{i=1}^{n_z} \angle(s + z_i) - \sum_{i=1}^{n_p} \angle(s + p_i) = (2k+1)\pi \quad (4.34)$$

Figur 4.4: Rotkurver for $s(s+2)(s^2+2s+2)+K=0$ når $K \in (-\infty, +\infty)$. Legg merke til symmetrien om punktet $s = -1$.

hvor $z_i, i \in \{1, 2, \dots, n_z\}$ er endelige nullpunkter. Når $|s| \rightarrow \infty$ vil

$$\angle(s + z_i) \rightarrow \phi, \quad i \in \{1, 2, \dots, n_z\} \quad (4.35)$$

$$\angle(s + p_i) \rightarrow \phi, \quad i \in \{1, 2, \dots, n_p\} \quad (4.36)$$

for endelige nullpunkter og poler. Dette gir

$$\phi(n_p - n_z) = (2k + 1)\pi \quad (4.37)$$

Asymptotene må ha vinkler $\theta_k = \phi$. ■

4.3.6 Skjæringspunkt for asymptotene

Skjæringspunktet mellom asymptotene kalles ofte for **sentroiden**.

Teorem 4.6 Anta at $n_p > n_z$, og betrakt rotkurvene for $K \in (-\infty, +\infty)$. Da gjelder

1. Skjæringspunktet mellom de $n_p - n_z$ asymptotene til rotkurvene ligger på den reelle akse i det komplekse plan.
2. Skjæringspunktet mellom asymptotene er gitt av

$$\sigma = \frac{\sum_{i=1}^{n_z} z_i - \sum_{i=1}^{n_p} p_i}{n_p - n_z} \quad (4.38)$$

Punkt 1 følger av symmetriegenskapene til rotkurvene med hensyn på den reelle akse.

Punkt 2 kan vises ved å betrakte den karakteristiske ligningen $1 + Kh(s) = 0$ for store verdier av $|s|$. Ligningen kan da tilnærmes med

$$1 + K \frac{s^{n_z}}{s^{n_p}} = 1 + K \frac{1}{s^{n_p - n_z}} = 0 \quad (4.39)$$

Denne tilnærmingen er åpenbart for grov siden den indikerer at sentroiden ligger i origo. En bedre tilnærming av den karakteristiske ligningen er

$$1 + K \frac{1}{(s - \sigma)^{n_p - n_z}} = 0 \quad (4.40)$$

som tilsvarende en sentroide i $s = \sigma$.

Sentroiden finnes av

$$1 + K \frac{\prod_{i=1}^{n_z} (s + z_i)}{\prod_{i=1}^{n_p} (s + p_i)} = 1 + K \frac{s^{n_z} + b_{n_z-1}s^{n_z-1} + \dots + b_0}{s^{n_p} + a_{n_p-1}s^{n_p-1} + \dots + a_0} = 0 \quad (4.41)$$

hvor det er greit å verifisere at

$$b_{n_z-1} = \sum_{i=1}^{n_z} z_i \quad \text{og} \quad a_{n_p-1} = \sum_{i=1}^{n_p} p_i \quad (4.42)$$

Ved lang divisjon av teller med nevner fås

$$1 + K \frac{1}{s^{n_p - n_z} + (a_{n_p-1} - b_{n_z-1})s^{n_p - n_z - 1}} = 0 \quad (4.43)$$

hvor bare de to første leddene i s er tatt med. Lign. (4.40) kan skrives

$$1 + K \frac{1}{(s - \sigma)^{n_p - n_z}} = 1 + k \frac{1}{s^{n_p - n_z} - (n_p - n_z)\sigma s^{n_p - n_z - 1}} = 0 \quad (4.44)$$

Sammenligning mellom de to ligningene viser at

$$a_{n_p-1} - b_{n_z-1} = -(n_p - n_z)\sigma \quad (4.45)$$

som er ekvivalent med lign. (4.38). ■

4.3.7 Rotkurver på den reelle akse

Teorem 4.7

1. Ethvert punkt på den reelle akse ligger på en av forgreningene til rotkurvene for $K \in (-\infty, +\infty)$.
2. Rotkurver for $K \in [0, +\infty)$ som ligger på den reelle akse ligger til venstre for et ulike antall poler og nullpunkter.
3. Rotkurver for $K \in (-\infty, 0]$ som ligger på den reelle akse ligger til venstre for et like antall poler og nullpunkter.

Dette vises ut fra følgende observasjoner:

- For ethvert punkt på den reelle akse er vinkelbidraget fra et komplekskonjugert pol- eller nullpunktpar lik null.
- Poler og nullpunkter til venstre for et punkt på den reelle akse gir null vinkelbidrag.
- Nullpunkter og poler til høyre for for et punkt på den imaginære akse gir hver et vinkelbidrag på henholdsvis $+180^\circ$ og -180° .

Fra dette følger teoremet. ■

Eksempel 4.4 Gitt et system med sløyfetransferfunksjon

$$h_0(s) = K \frac{1 + 0.5s}{s(1 + 0.25s)} \quad (4.46)$$

hvor rotkurvene skal finnes når K varierer fra null til uendelig. Den karakteristiske ligningen er

$$1 + k \frac{s + 2}{s(s + 4)} = 0 \quad (4.47)$$

hvor $k = 2K$ og det åpne systemet har poler i 0 og -4 og nullpunkter i -2 og $-\infty$.

Kriteriet på fasen tilsier at den delen av rotkurvene som er på den reelle akse er mellom 0 og -2 og fra -4 til $-\infty$. Siden begge disse linjestykkene begynner i en pol og ender i et nullpunkt er det klart at disse linjestykkene utgjør rotkurvene for systemet for $K \in [0, +\infty)$. Dette er vist i figur 4.5. ■

4.3.8 Retning ut fra en pol og inn til et nullpunkt

Retningen til rotkurvene ut fra en pol og inn til et nullpunkt kan beregnes fra kravet på vinklene (lign. 4.9). For et punkt s_1 like ved en pol $s = -p_i$ vil vinkelbidragene fra alle de andre nullpunktene og polene være tilnærmet lik vinklene for vektorene fra disse nullpunktene og polene til polen p_i :

$$\angle(s_1 + z_j) \approx \angle(-p_i + z_j) \quad (4.48)$$

$$\angle(s_1 + p_j) \approx \angle(-p_i + p_j) \quad (4.49)$$

hvor $i \neq j$.

La θ betegne vinkelen til rotkurvens tangent. Retningen $\theta = \angle(s + p_i)$ ut fra pol i finnes dermed av

$$\sum_{j=1}^{n_z} \angle(-p_i + z_j) - \sum_{j=1, j \neq i}^{n_p} \angle(-p_i + p_j) - \theta = (2k + 1)\pi \quad (4.50)$$

Tilsvarende finnes retningen $\theta = \angle(s + z_i) - 180^\circ$ inn mot nullpunkt i å være gitt av

$$\sum_{j=1, j \neq i}^{n_z} \angle(-z_i + z_j) + \theta - \sum_{j=1}^{n_p} \angle(-z_i + p_j) = 2k\pi \quad (4.51)$$

Figur 4.5: Rotkurver for $s(s + 4) + k(s + 2) = 0$ for positive k .

Eksempel 4.5 Gitt den karakteristiske ligning

$$1 + K \frac{s + 2}{s(s + 3)(s^2 + 2s + 2)} = 0 \quad (4.52)$$

hvor det åpne system har poler i 0, -3 og $-1 \pm j1$, og et nullpunkt i -2 .

For skissering av rotkurvene for positive K skal vinkelen ut fra polen $-1 + j1$ finnes. For et punkt på rotkurven en infinitesimal forflytning fra polen er vinklene

$$+ 45^\circ - 135^\circ - 90^\circ - 26.6^\circ - \theta = 180^\circ + k \cdot 360^\circ \quad (4.53)$$

som gir $\theta = -26.6^\circ$. Dette betyr at rotkurven forlater polen med en vinkel -26.6° . Tilsvarende finnes vinkelen ut fra den komplekskonjugerte polen i $-1 - j1$ å være $\theta = 26.6^\circ$. Rotkurvene er vist i figur 4.6. ■

Eksempel 4.6 Gitt et system med sløyfetransferfunksjon

$$h_0(s) = K \frac{s^2 + 16}{s(s^2 + 25)} \quad (4.54)$$

som har poler i 0 og $\pm j5$ og nullpunkter i $\pm j4$. Dette er en typisk transferfunksjon for en motor som driver en elastisk last hvor pådrag er motormomentet og målingen er motorakslingens vinkelhastighet. Rotkurvene søkes for positive K .

En rotkurve ligger på den reelle akse fra 0 til $-\infty$ siden dette er til venstre for tre poler og to nullpunkt som er et ulike antall. De to siste forgreningene må starte i de

Figur 4.6: Rotkurver for $s(s+3)(s^2+2s+2)+K(s+2)=0$ når $K > 0$.

komplekskonjugerte polene og slutte i de komplekskonjugerte nullpunktene. Det er da viktig å bestemme vinkelen til rotkurvene ut fra polene og inn til nullpunktene.

For polen $j5$ er rotkurvens vinkel ut

$$90^\circ + 90^\circ - (90^\circ + 90^\circ + \theta) = (2k+1)180^\circ \quad (4.55)$$

som gir $\theta = 180^\circ$ for $k = -1$.

For nullpunktet $j4$ er rotkurvens vinkel inn

$$90^\circ + \theta - (-90^\circ + 90^\circ + 90^\circ) = 2k180^\circ \quad (4.56)$$

som gir $\theta = 0^\circ$ for $k = 0$.

Dette betyr at de to komplekskonjugerte forgreningene av rotkurvene starter i $\pm j5$ for $K = 0$, går inn i venstre halvplan når K øker, og ender i $\pm j4$ når $K \rightarrow +\infty$. Rotkurvene er plottet i figur 4.7 for positive K . ■

4.3.9 Skjæring mellom rotkurvene og den imaginære akse

Verdien av K som gir skjæring mellom rotkurvene og den imaginære akse, finnes ved bruk av Rouths kriterium.

4.3.10 Krysspunkter

Krysspunkter eller sadelpunkter på rotkurvene er **punkter som svarer til multiple poler**. Et typisk eksempel er to poler på den reelle akse som møtes i et krysspunkt og

Figur 4.7: Rotkurver for $s(s^2 + 25) + K(s^2 + 16) = 0$ og $K > 0$. Legg merke til at systemet er stabilt for alle $K > 0$.

går over i et komplekskonjugert polpar. Krysspunkter kan også forekomme for høyere ordens røtter. Krysspunkter utenfor den reelle akse må forekomme i komplekskonjugerte par.

Teorem 4.8 Gitt den karakteristiske ligningen $1 + Kh(s) = 0$.

1. Anta $|K| < \infty$. Krysspunktene for rotkurvene må da oppfylle ligningen

$$\frac{d}{ds} \left[-\frac{1}{h(s)} \right] = 0 \quad (4.57)$$

2. Anta $K \neq 0$. Krysspunktene for rotkurvene må da oppfylle ligningen

$$\frac{d}{ds} h(s) = 0 \quad (4.58)$$

Dette vises som følger: $h(s)$ skrives

$$h(s) = \frac{t(s)}{n(s)} \quad (4.59)$$

Dette gir

$$\frac{d}{ds} \left[-\frac{1}{h(s)} \right] = -\frac{1}{t(s)^2} \left[t(s) \frac{d}{ds} n(s) - n(s) \frac{d}{ds} t(s) \right] \quad (4.60)$$

og

$$\frac{d}{ds} h(s) = \frac{1}{n(s)^2} \left[n(s) \frac{d}{ds} t(s) - t(s) \frac{d}{ds} n(s) \right] \quad (4.61)$$

Anta at $|K| < \infty$. Anta videre at s_1 er et krysspunkt av orden $n_k > 1$, hvilket vil si at det er en rot av orden n_k for den karakteristiske ligning. Den karakteristiske ligning kan da faktoriseres som

$$n(s) + Kt(s) = (s - s_1)^{n_k}(s - s_2)(s - s_3) \dots \quad (4.62)$$

Den deriverte i krysspunktet $s = s_1$ blir

$$\left[\frac{d}{ds}n(s) + K \frac{d}{ds}t(s) \right]_{s=s_1} = [n_k(s - s_1)^{n_k-1}p(s)]_{s=s_1} = 0 \quad (4.63)$$

hvor $p(s)$ er et polynom i s . Innsetting av $K = -n(s)/t(s)$ som alltid er oppfylt på rotkurven, gir

$$\left[\frac{d}{ds}n(s) - \frac{n(s)}{t(s)} \frac{d}{ds}t(s) \right]_{s=s_1} = 0 \quad (4.64)$$

Siden K er antatt å være endelig, er $t(s)$ forskjellig fra null, og dermed følger lign. (4.60). Del 1 av teoremet er dermed vist.

Del 2 vises ved å anta $K \neq 0$ og betrakte ligningen

$$\frac{n(s)}{K} + t(s) = \frac{1}{K}(s - s_1)^{n_k}(s - s_2)(s - s_3) \dots \quad (4.65)$$

Resultatet kan da vises analogt med utregningen over. ■

I forbindelse med punkt 1 i teoremet er det verdt å legge merke til at på rotkurven er $K = -1/h(s)$.

Teoremet gir nødvendige, men ikke tilstrekkelige betingelser. Mer spesifikt gjelder

1. Alle reelle løsninger av lign. (4.57,4.58) er krysspunkter til rotkurvene for $K \in (-\infty, +\infty)$, siden hele den reelle akse består av rotkurver. Reelle løsninger av lign. (4.57,4.58) som ligger på linjestykker som er til venstre for et ulike antall nullpunkter og poler, er krysspunkter for rotkurver hvor $K \in [0, +\infty)$.
2. Komplekskonjugerte løsninger av lign. (4.57,4.58) er krysspunkter for rotkurvene hvis de ligger på rotkurvene.

Vinkelen mellom de ulike rotkurvene i et krysspunkt er $180^\circ/n$ hvor n er antall røtter som møtes i krysspunktet.

Eksempel 4.7 Gitt et systemet

$$h_0(s) = K \frac{s + 4}{s(s + 2)} \quad (4.66)$$

som har karakteristisk ligning

$$1 + K \frac{s + 4}{s(s + 2)} = 0 \quad (4.67)$$

Rotkurvene skal skisseres for $K \in (-\infty, +\infty)$.

Det kan vises at den delen av rotkurvene som ikke er på den reelle akse ligger på en sirkel i det komplekse plan. De to krysspunktene ligger begge på den reelle akse, den ene mellom 0 og -2 og den andre mellom -4 og $-\infty$. Krysspunktene finnes av

$$\frac{dh_0(s)}{ds} = \frac{d}{ds} \frac{s+4}{s(s+2)} = 0 \quad (4.68)$$

som er oppfylt for

$$s^2 + 8s + 8 = 0 \quad (4.69)$$

som gir krysspunktene $s = -1.172$ og $s = -6.828$. Rotkurvene er vist i figur 4.8.

Figur 4.8: Rotkurver for $s(s+2) + K(s+4) = 0$ når $K \in (-\infty, +\infty)$

■

Eksempel 4.8 Gitt systemet

$$h_0(s) = K \frac{1}{s(s+1)(s+2)} \quad (4.70)$$

hvor rotkurvene skal skisseres for positive K . Systemet har poler i 0, -1 og -2 , og tre nullpunkter i uendelig. Rotkurvene starter for $K = 0$ i de tre polene. På den reelle akse må rotkurvene ligge til venstre for et ulike antall poler, og dette betyr at rotkurvene på den reelle akse ligger mellom 0 og -1 og mellom -2 og $-\infty$. Røttene som starter i 0 og -1 går mot hverandre, møtes i et krysspunkt mellom 0 og -1 , og går over i et komplekskonjugert par. I krysspunktet gjelder

$$\frac{d}{ds} \frac{1}{s(s+1)(s+2)} = 0 \quad (4.71)$$

som er oppfylt når

$$3s^2 + 6s + 2 = 0 \quad (4.72)$$

Det gir mulige krysspunkt i -0.4226 og -1.5774 . Det søkte krysspunktet er derfor i $s = -0.4226$. Rotkurvene forlater den reelle akse med en vinkel $\pm 90^\circ$.

Asymptotene har vinkler

$$\theta_k = \frac{(2k+1)\pi}{3} \quad (4.73)$$

dvs. 60° , 180° og -60° .

Sentroiden ligger i

$$\sigma = \frac{0 - 1 - 2}{3} = -1 \quad (4.74)$$

På bakgrunn av dette kan man skissere rotkurvene relativt nøyaktig, hvilket sees av figur 4.3. ■

Eksempel 4.9 Gitt systemet

$$h_0(s) = K \frac{1}{s(s+2)[(s+1)^2+4]} \quad (4.75)$$

som har poler i 0 , -2 og i $-1 \pm j2$. Krysspunktene er gitt av

$$\frac{d}{ds}s(s+2)[(s+1)^2+4] = 4s^3 + 12s^2 + 18s + 10 = 0 \quad (4.76)$$

Et rotløserprogram som f.eks.

```
roots([4 12 18 10])
```

i MATLAB gir løsningene $s = -1$ og $s = -1 \pm j1.2247$. Ut fra vinkelbetraktninger ser man at linjen $s = -1 \pm j\omega$ er en rotkurve for alle ω , og løsningene er derfor krysspunkter for rotkurvene.

Asymptotene har vinkler $\pm 45^\circ$ og $-180^\circ \pm 45^\circ$ siden systemet har fire nullpunkter i uendelig. Sentroiden ligger i -1 . Rotkurvene er vist i figur 4.9. ■

4.4 Introduksjon av poler og nullpunkter

I regulatordesign er det vanlig å introdusere poler og nullpunkter i sløyfetransferfunksjonen ved å innføre integral- eller derivatvirkning. Ved bruk av rotkurvemethoden kan man få bedre innsikt i hvilken virkning nye poler og nullpunkter har på dynamikken til det lukkede system, og hvilken effekt det har at poler og nullpunkter flyttes. Metoden er spesielt egnet for å oppnå kvalitative resultater, men kan også benyttes for å bestemme parameterverdier.

Figur 4.9: Rotkurver for $s(s+2)[(s+1)^2+4]+K=0$ for $K \in (-\infty, +\infty)$. Legg merke til krysspunktene utenfor den reelle akse.

4.4.1 Introduksjon av poler

Vanligvis kan man anta for $K \in [0, \infty)$ at:

- Hvis en pol i venstre halvplan introduseres i $h(s)$, vil rotkurvene forskyves mot høyre halvplan.

Dette skal her demonstreres for et system med

$$h_0(s) = K \frac{1}{s(s+a)}, \quad a > 0 \quad (4.77)$$

Røttene til den karakteristiske ligning $1 + h_0(s)$ for positive K starter i polene 0 og $-a$. Linjestykket fra 0 til $-a$ på den reelle akse ligger til venstre for en pol og er derfor inneholdt i rotkurvene. Et krysspunkt finnes for $-a/2$ enten ved figurbetragtning basert på vinkelbidrag, eller ved å sette

$$\frac{dh_0(s)}{ds} = -\frac{2s+a}{s^2(s+a)^2} = 0 \Rightarrow s = -\frac{a}{2} \quad (4.78)$$

Vinkelen ut fra krysspunktet er $\pm 90^\circ$ for et andreordens system. Systemet har to nullpunkter i uendelig. Asymptotene til systemet vil ha vinkel $\pm 90^\circ$, mens sentroiden er i $-a/2$. Rotkurvene er vist i figur 4.10.

En pol introduseres i $-b$ hvor $b > a$ slik at

$$h_0(s) = K \frac{1}{s(s+a)(s+b)} \quad (4.79)$$

Figur 4.10: Rotkurver for $s(s + a) + K = 0$ for positive K .

Rotkurvene på den reelle akse ligger da mellom 0 og $-a$ og fra $-b$ til $-\infty$. Krysspunktet på den reelle akse forskyves mot høyre. Rotkurvene er plottet i figur 4.11 for $b = 2$.

Eksempel 4.10 Med $a = 1$ fås følgende krysspunkt

b	0	0.5	1	2	5	10	∞
s_{kr}	0	-0.21	-0.33	-0.42	-0.47	-0.49	-0.5

■

Systemet har tre nullpunkter i uendelig, og asymptotene har vinklene $\pm 60^\circ$ og 180° . Sentroiden ligger i $-(a + b)/3$. For store K ligger to av forgreningene i det høyre halvplan og systemet er ustabil. Den kritiske verdien for K hvor rotkurvene passerer den imaginære akse er $K_{krit} = (a + b)ab$ som finnes av Rouths kriterium.

Enda en pol introduseres i $-c$ slik at

$$h_0(s) = K \frac{1}{s(s + a)(s + b)(s + c)} \quad (4.80)$$

hvor $0 < a < b < c$. Systemet har nå fire nullpunkt i uendelig, og asymptotene har vinkler $\pm 45^\circ$ og $180^\circ \pm 45^\circ$. På den reelle akse ligger rotkurvene mellom 0 og $-a$ og mellom $-b$ og $-c$. To forgreninger går også i dette tilfelle inn i høyre halvplan, og disse forgreningene er forskjøvet lenger mot høyre enn for det tredjeordens systemet som tilsvarende $c = \infty$, og den kritiske verdien på K blir redusert.

Rotkurvene er plottet i figur 4.12 for $c = 3$ og $K > 0$.

Figur 4.11: Rotkurver for et system med to poler i -1 og -2 og en integrasjon. Forsterkningen K er positiv.

Eksempel 4.11 Et eksempel på et system hvor rotkurvene ikke forskyves til høyre ved introduksjon av en pol i høyre halvplan er systemet

$$h_0(s) = \frac{1}{s(1 + 2\zeta\frac{s}{\omega_0} + \frac{s^2}{\omega_0^2})} \quad (4.81)$$

hvor $\zeta \leq 0.1$.

Rotkurver er vist i figur 4.13 med og uten tidskonstanten for de samme verdier for hastighetskonstanten. Hastighetskonstanten er forøvrig $K_v = K\omega_0^2$ uten tidskonstanten, mens den er $K_v = K\omega_0^2$ med tidskonstanten i $s = a$. Det går klart frem at med tidskonstanten vil rotkurvene bli bøyd av slik at de ligger lenger inn i venstre halvplan, og stabilitetsgrensen på hastighetskonstanten er større. ■

4.4.2 Introduksjon av nullpunkt

Vanligvis kan man anta for $K \in [0, \infty)$ at:

- Hvis et nullpunkt i venstre halvplan introduseres i $h(s)$, vil rotkurvene forskyves og bøyes mot venstre.

Et nullpunkt introduseres i systemet med

$$h_0(s) = K \frac{1}{s(s+a)}, \quad a > 0 \quad (4.82)$$

Figur 4.12: Rotkurver for positive K for et system med tre poler i -1 , -2 og -3 og en integrasjon.

slik at transferfunksjonen blir

$$h_0(s) = K \frac{s+b}{s(s+a)}, \quad b > a > 0 \quad (4.83)$$

På den reelle akse ligger rotkurvene for positive K i intervallet mellom 0 og $-a$ og fra $-b$ til $-\infty$. Utenfor den reelle akse ligger rotkurvene på en sirkel med sentrum i $s = -b$. Dette kan vises ved å betrakte røttene

$$s_{1,2} = -\frac{a+K}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a+K}{2}\right)^2 - Kb} \quad (4.84)$$

for den karakteristiske ligning. Når røttene er komplekse, er

$$|s+b|^2 = b^2 - ab \quad (4.85)$$

hvilket finnes ved direkte utregning.

Krysspunktene finnes av

$$s^2 + 2bs + ab = 0 \quad (4.86)$$

som finnes av $(d/ds)h_0(s) = 0$.

Rotkurvene er vist i figur 4.14 for $a = 1$ og $b = 2$.

Eksempel 4.12 Anta at $a = 1$. Krysspunktene blir da

b	1	2	5	10	∞
s_{kr1}	-1	-0.59	-0.53	-0.51	-0.5
s_{kr2}	-1	-3.41	-9.47	-19.5	$-\infty$

Figur 4.13: Røtter for et system med en pol i origo og komplekskonjugerte poler i $-10 \pm j100$ (markert med X) og for samme system med en pol i -31.6 i tillegg (markert med O). Røttene er vist for $K_v \in \{10, 20, 30, \dots, 100\}$ for begge systemene.

■

Hvis en pol og et nullpunkt introduseres i det opprinnelige system fås

$$h_0(s) = K \frac{s + c}{s(s + a)(s + b)} \quad (4.87)$$

Sentroiden for dette systemet ligger i

$$\sigma = -\frac{a + b - c}{2} \quad (4.88)$$

1. Anta at $c > a + b$. Rotkurvene vil i dette tilfelle gå inn i høyre halvplan. Dette er vist i figur 4.15 for $a = 1$, $b = 5$ og $c = 10$. Den kritiske forsterkningen K_{krit} vil øke for avtagende c . Hvis $c \rightarrow \infty$, vil $h_0(s) \rightarrow Kc/s(s + a)(s + b)$.
2. Anta at $c < a + b$. Rotkurvene vil da ligge i venstre halvplan og følgelig er systemet stabilt for alle K . Rotkurvene for $a = 1$, $b = 5$ og $c = 2$ er vist i figur 4.16.

4.5 Hastighetsstyring

En strømstyrt likestrømsmotor har modellen

$$J\dot{\omega}_m(t) = K_T i(t) \quad (4.89)$$

Figur 4.14: Rotkurver for et system med en pol i -1 , et nullpunkt i -2 og en pol i origo. Forsterkningen K er positiv.

hvor J er treghetsmoment for motor og last, $\omega_m(t)$ er vinkelhastighet av motorakslingen, K_T er motorens momentkonstant og $i(t)$ er ankerstrømmen som er pådraget. For enkelhets skyld skaleres systemet ved å innføre

$$u(t) = \frac{J}{K_T} i(t) \quad (4.90)$$

som gir modellen

$$\dot{\omega}_m(t) = u(t) \quad (4.91)$$

En hastighetssløyfe med proporsjonal tilbakekobling skal undersøkes først. Regulatoren er

$$u(t) = K_a[\omega_0(t) - \omega_m(t)] \quad (4.92)$$

hvor K_a er akselerasjonskonstanten og $\omega_0(t)$ er referansen.

Den karakteristiske ligning blir

$$s + K_a = 0 \quad (4.93)$$

og rotkurven starter i $s = 0$ for $K_a = 0$, og går langs den reelle akse til $s = \pm\infty$ for $K_a = +\infty$. Systemet er altså stabilt for alle K_a .

En PI-regulator

$$u(s) = K \frac{1 + T_i s}{T_i s} [\omega_0(s) - \omega_m(s)] \quad (4.94)$$

gir sløyfetransferfunksjon

$$h_0(s) = K \frac{s + a}{s^2} \quad (4.95)$$

Figur 4.15: Rotkurver for system med poler i 0, -1 og -5 og et nullpunkt i -10 for positive K .

hvor $a = 1/T_i$. Den karakteristisk ligningen blir

$$s^2 + K(s + a) = 0 \quad (4.96)$$

$h_0(s)$ har en dobbel pol i origo, et nullpunkt i $s = -a$ og et nullpunkt i uendelig. Rotkurvene må starte i origo for $K = 0$, og de ender i nullpunktene for $K = +\infty$. Den delen av rotkurvene som ligger på den reelle akse må ligge til venstre for et ulike antall poler og nullpunkter, hvilket vil si mellom $-a$ og $-\infty$. Plotter man rotkurven ved bruk av en programpakke som f.eks. MATLAB (se figur 4.17) ser man at den komplekse delen av rotkurvene ser ut til å ligge på en sirkel med sentrum i $-a$. Dette verifiseres ved å beregne $|s + a|^2$ for punktene

$$s_{1,2} = -\frac{K}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{K}{2}\right)^2 - Ka} \quad (4.97)$$

utenfor den reelle akse:

$$|s + a|^2 = \left(a - \frac{K}{2}\right)^2 + Ka - \left(\frac{K}{2}\right)^2 = a^2 \quad (4.98)$$

hvilket betyr at utenfor den reelle akse ligger rotkurvene på sirkelen $|s + a|^2 = a^2$ som har sentrum i $-a$ og radius a . I dette tilfelle er systemet stabilt for alle $K > 0$.

Krysspunktene forekommer ved $K = 0$ og $K = 2a$. Et kritisk dempet system fås med $K = 2/T_i$ som betyr at knekkfrekvensen til PI-regulatoren er en fjerdedel av forsterkningen K .

Figur 4.16: Rotkurver for positive K for et system med poler i 0, -1 og -5 og et nullpunkt i -2 .

4.6 Posisjonsstyring

En strømstyrt likestrømsmotor beskrives med modellen

$$\theta_m(s) = \frac{1}{s^2}u(s) \quad (4.99)$$

hvor u er pådraget.

En PD-regulator

$$u(s) = K \frac{s+a}{s+b} [\theta_0(s) - \theta_m(s)] \quad (4.100)$$

benyttes. Her er derivattiden $T_d = 1/a$, og filtertiden er $T_f = 1/b$. Sløyfetransferfunksjonen blir

$$h_0(s) = Kh(s) = K \frac{s+a}{s^2(s+b)} \quad (4.101)$$

Derivattiden settes konstant ved å velge $a = 1$, og rotkurvene for karakteristiske verdier av b studeres.

Hvis $b = \infty$, som tilsvarer ubegrenset derivasjon, fås

$$h_0(s) = \bar{K} \frac{s+a}{s^2} \quad (4.102)$$

hvor $\bar{K} = K/b$. Rotkurvene består i dette tilfelle av en sirkel med sentrum i $s = -a$ og radius lik a . På den reelle akse ligger rotkurven til venstre for nullpunktet i $-a$. Systemet har et nullpunkt i uendelig, og den eneste asymptoten går langs den reelle akse til $-\infty$. Rotkurven er vist i figur 4.17.

Figur 4.17: Rotkurver for et system med hastighetsstyring ved bruk av PI-regulator plottet for $a = 1$.

Et vanlig valg for filtertiden vil være $b = 10$. Systemet har to nullpunkter i uendelig, og asymptotene har vinkel $\pm 90^\circ$ med sentroide i $-(10 - 1)/2 = -4.5$. Krysspunktet finnes av

$$\frac{d}{ds}\left(-\frac{1}{h(s)}\right) = -\frac{d}{ds} \frac{s^2(s+10)}{s+1} = 0 \quad (4.103)$$

som er oppfylt for

$$(3s^2 + 20s)(s+1) - (s^3 + 10s^2) = 0$$

Løsningen kan finnes i MATLAB ved

```
roots(conv([3 20 0],[1 1])-[1 10 0 0])
```

og er gitt ved 0, -2.5 og -4 som alle er på rotkurven for $K > 0$. Rotkurven er vist i figur 4.18.

En interessant kurve fås for $b = 9$. I dette tilfelle er sentroiden i $-(9 - 1)/2 = -4$. Krysspunkt finnes å være 0 og -3 hvor -3 er et trippelpunkt. Rotkurven er vist i figur 4.19.

En begrenset derivatvirkning gir et maksimalt positivt fasebidrag på 45° hvis $T_d = 6T_f$. Dette tilsvarer $b = 6$ i dette eksemplet. Sentroiden er i -2.5 i dette tilfelle, og det eneste krysspunktet er i null (figur 4.20).

Figur 4.18: *Rotkurver for dobbelintegrator med derivasjon over en dekode, dvs. med $a = 1$ og $b = 10$.*

Figur 4.19: *Rotkurve for for dobbelintegrator med begrenset derivasjon hvor $a = 1$ og $b = 9$. Kurven har et trippelpunkt for $K = 27$.*

Figur 4.20: Rotkurve for for dobbelintegrator med begrenset derivasjon hvor $a = 1$ og $b = 6$.

4.7 MATLAB-eksempel

Rotkurven i figur 4.20 kan genereres i MATLAB med følgende kommandoer.

```
t = [1 1];
n = [1 6 0 0];

axis([-11 1 -6 6])
k = (0:1:100);
r = rlocus(t,n,k);

plot(r, '-'), xlabel('Re'), ylabel('Im'), grid, hold on

plot(-6,0, 'x')
plot(-1,0, 'o')
```


Kapittel 5

Passivitet

5.1 Innledning

Et system har pådrag $u(t)$ og måling $y(t)$. Totalenergien i systemet antas å være større eller lik null og betegnes $V(t)$, mens initiell energi i systemet betegnes $V(0)$. Systemet sies da å være **passivt** hvis energien $V(T)$ ved tidspunkt $T \geq 0$ oppfyller

$$V(T) \leq V(0) + \int_0^T y(t)u(t)dt \quad \text{for alle } u(\cdot) \text{ og alle } T \geq 0 \quad (5.1)$$

Siden $V(T) \geq 0$ for alle $T \geq 0$ så er $V(0) + \int_0^T y(t)u(t)dt \geq 0$, hvilket betyr at energien som kan trekkes ut av systemet over pådraget er mindre eller lik den initielle energien lagret i systemet. I forbindelse med analyse og design av regulator er da følgende observasjon viktig: Hvis $\int_0^T y(t)u(t)dt \leq 0$, hvilket oppnås f.eks. med en P-regulator $u(t) = -K_p y(t)$, så $V(T) \leq V(0)$, og totalenergien i det regulerede systemet er dermed begrenset. Dette vil med et fornuftig valg av systembeskrivelse og energifunksjon $V(t)$ bety at systemet er stabilt. Vi kan altså påvise stabilitet for et passivt system med tilbakekobling ved bruk enkle energibetraktninger. Passivitet viser seg å være meget nyttig i regulatoranalyse og -design for mekaniske systemer, og da særlig for systemer bestående av dempere, masser og fjærer og for distribuerte systemer som elastiske mekaniske konstruksjoner og systemer med akustiske fenomener.

Legg merke til at det ikke er den fysiske prosessen i seg selv som er passiv, men systemet med pådrag u og måling y . Således kan en fysisk prosess med pådrag u og to ulike målinger y_1 og y_2 definere et passivt systemet når u er pådrag og y_1 er måling, uten at systemet med samme pådrag, men med måling y_2 nødvendigvis er passivt.

I det følgende presenteres passivitet på en systematisk måte for generelle prosesser beskrevet med transferfunksjoner. Deretter vil sentrale resultater for passive systemer presenteres, og spesielt vil analyse av regulatorer og regulatorstrukturer for passive systemer behandles.

5.2 Definisjoner

Stoffet i dette kapittelet er i hovedsak basert på [9].

Definisjon 5.1 Et system med pådrag $u(t)$ og måling $y(t)$ er **passivt** hvis det eksisterer en konstant β slik at

$$\int_0^T y(t)u(t)dt \geq \beta \quad \text{for alle } u \text{ og alle } T \geq 0 \quad (5.2)$$

■

Her må åpenbart $\beta \leq 0$ siden ulikheten skal gjelde for alle pådragsforløp u og dermed spesielt for pådraget $u(t) = 0$ for alle $t \geq 0$, som gir $\int_0^T y(t)u(t)dt = 0 \geq \beta$.

Følgende teorem gir mer innsikt i hva passivitet innebærer.

Teorem 5.1 Anta at det eksisterer en kontinuerlig funksjon $V(t) \geq 0$, som betegnes energifunksjonen, og at $y(t)u(t)$ kan betraktes som tilført effekt slik at

$$V(T) - V(0) \leq \int_0^T y(t)u(t)dt \quad \text{for alle } u, \text{ alle } V(0) \text{ og alle } T \geq 0 \quad (5.3)$$

Da er systemet med pådrag $u(t)$ og måling $y(t)$ passivt.

Bevis: Siden $V(T) \geq 0$ er

$$\int_0^T y(t)u(t)dt \geq -V(0)$$

og lign. (5.2) er oppfylt med $\beta = -V(0) \leq 0$. ■

Dette betyr at konstanten β som opptrer i definisjonen av passive systemer er relatert til begynnelsesenergien til systemet.

Kommentar 5.1 Passivitet som definert her gjelder også for **ulineære systemer**. ■

Definisjon 5.2 Et system med pådrag $u(t)$ og måling $y(t)$ er **strengt passivt** hvis det eksisterer en konstant β og en konstant $\delta > 0$

$$\int_0^T y(t)u(t)dt \geq \beta + \delta \int_0^T u^2(t)dt \quad \text{for alle } u \text{ og alle } T \geq 0 \quad (5.4)$$

■

Teorem 5.2 Anta at det eksisterer en kontinuerlig funksjon $V(t) \geq 0$ og en konstant $\delta > 0$ slik at

$$V(T) - V(0) \leq \int_0^T y(t)u(t)dt - \delta \int_0^T u^2(t)dt \quad (5.5)$$

for alle u , alle $V(0)$ og alle $T \geq 0$. Da er systemet med pådrag $u(t)$ og måling $y(t)$ strengt passivt.

Dette vises på samme måte som teorem 5.1. ■

Korollar 5.1 Gitt et system med pådrag $u(t)$ og måling $y(t)$. Anta at det eksisterer en $V(t) \geq 0$ og en $g(t)$ slik at $\int_0^T g(t)dt \geq 0$ for alle $T \geq 0$.

1. Hvis

$$\dot{V}(t) \leq y(t)u(t) - g(t) \quad (5.6)$$

for alle $t \geq 0$ og for alle pådragsforløp u , så er systemet passivt.

2. Hvis det eksisterer en $\delta > 0$ slik at

$$\dot{V}(t) \leq y(t)u(t) - \delta u^2(t) - g(t) \quad (5.7)$$

for alle $t \geq 0$ og for alle pådragsforløp u , så er systemet strengt passivt.

Bevis: Integrasjon av (5.6) og (2) over intervallet $[0, T]$ gir (5.3) og (5.5) siden $\int_0^T g(t)dt \geq 0$ for alle $T \geq 0$. Resultatet følger dermed av teorem 5.1 og 5.2. ■

Her representerer $g(t)$ effekttap i systemet, og betingelsen $\int_0^T g(t)dt \geq 0$ for alle $T \geq 0$ betyr at systemet taper energi.

Definisjon 5.3 Et system med pådrag $u(t)$ og måling $y(t)$ er **y -strengt passivt** hvis det eksisterer en konstant β og en konstant $\delta > 0$

$$\int_0^T y(t)u(t)dt \geq \beta + \delta \int_0^T y^2(t)dt \quad \text{for alle } u \text{ og alle } T \geq 0 \quad (5.8)$$

■

Under de samme betingelser som i påstand 5.1 vil

$$\dot{V}(t) \leq y(t)u(t) - \delta y^2(t) - g(t) \quad (5.9)$$

implisere y -streng passivitet.

Passivitet defineres på tilsvarende måte for multivariable systemer hvor det er like mange pådrag som målinger:

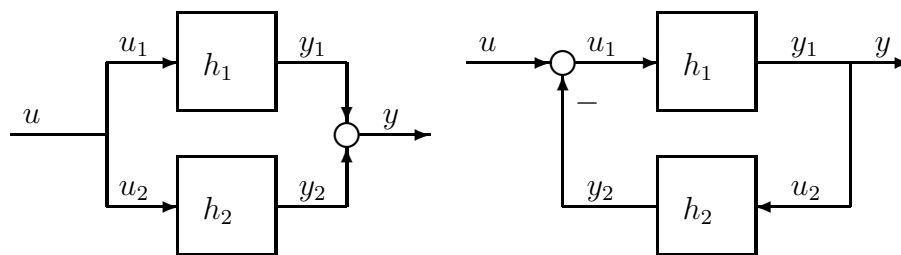
Definisjon 5.4 Et system med pådragsvektor $\mathbf{u}(t)$ og måling $\mathbf{y}(t)$ hvor $\mathbf{u}(t)$ og $\mathbf{y}(t)$ er m -dimensjonale vektorer, er passivt hvis det eksisterer en konstant β slik at

$$\int_0^T \mathbf{y}^T(t)\mathbf{u}(t)dt \geq \beta \quad \text{for alle } \mathbf{u} \text{ og alle } T \geq 0 \quad (5.10)$$

og strengt passivt hvis det i tillegg eksisterer en $\delta > 0$ slik at

$$\int_0^T \mathbf{y}^T(t)\mathbf{u}(t)dt \geq \beta + \delta \int_0^T \mathbf{u}^T(t)\mathbf{u}(t)dt \quad \text{for alle } \mathbf{u} \text{ og alle } T \geq 0 \quad (5.11)$$

■



Figur 5.1: Parallellkobling og tilbakekoblet system

5.3 Sammenkobling av passive systemer

En nyttig egenskap med passive systemer er at en parallellkobling av passive systemer er passiv, og at et system bestående av et passivt system med et passivt system i tilbakekoblingen er passivt. En parallellkobling og et tilbakekoblet system av to passive prosesser h_1 og h_2 er vist i figur 5.1.

Anta at:

1. Det eksisterer kontinuerlige funksjoner $V_1(t) \geq 0$ og $V_2(t) \geq 0$.
2. Det eksisterer funksjoner g_1 og g_2 som oppfyller betingelsene $\int_0^T g_1(t)dt \geq 0$ og $\int_0^T g_2(t)dt \geq 0$ for alle $T \geq 0$.
3. Det eksisterer konstanter $\delta_1 \geq 0$ og $\delta_2 \geq 0$ slik at

$$\dot{V}_1(t) \leq y_1(t)u_1(t) - \delta_1 u_1^2(t) - g_1(t) \quad (5.12)$$

$$\dot{V}_2(t) \leq y_2(t)u_2(t) - \delta_2 u_2^2(t) - g_2(t) \quad (5.13)$$

hvilket vil si at begge systemene er passive ifølge teorem 5.1. I tillegg er system i strengt passiv hvis $\delta_i > 0$ for $i \in \{1, 2\}$.

For parallellkoblingen gjelder da

$$yu = (y_1 + y_2)u = y_1u + y_2u = y_1u_1 + y_2u_2 \quad (5.14)$$

Ved å addere (5.12) og (5.13) finner man da at det eksisterer en $V = V_1 + V_2 \geq 0$ og en $g = g_1 + g_2$ slik at $\int_0^T g(t)dt \geq 0$ for alle $T \geq 0$ og at

$$\dot{V}(t) \leq y(t)u(t) - \delta u^2(t) - g(t) \quad (5.15)$$

hvor $\delta = \delta_1 + \delta_2 \geq 0$. Dette betyr at systemet med inngang u og utgang y er passivt og i tillegg strengt passivt hvis $\delta_1 > 0$ eller $\delta_2 > 0$.

For det tilbakekoblede systemet gjelder

$$yu = y_1(u_1 + y_2) = y_1u_1 + y_1y_2 = y_1u_1 + u_2y_2 \quad (5.16)$$

Ved å addere (5.12) og (5.13) finner man at det eksisterer da en $V = V_1 + V_2 \geq 0$ og en $g = g_1 + g_2 + \delta_1 \int_0^T u_1^2(t)dt$ slik at $\int_0^T g(t)dt \geq 0$ for alle $T \geq 0$ og at

$$\dot{V}(t) \leq y(t)u(t) - \delta_2 y^2(t) - g(t) \quad (5.17)$$

Dette betyr at systemet med inngang u og utgang y er passivt og i tillegg y -strengt passivt hvis $\delta_2 > 0$.

Ved induksjon kan man på samme måte vise at enhver kombinasjon av passive systemer i parallellkobling eller i tilbakekoblet struktur som i figur 5.1 er passiv.

5.4 Lineære systemer

Teorem 5.3 (Parsevals teorem)

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)y^*(t)dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x(j\omega)y^*(j\omega)d\omega \quad (5.18)$$

hvor y^* er den komplekskonjugerte av y .

Bevis: Gitt signalet $x(t)$. Den Fouriertransformerte av signalet er [29]¹

$$x(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt \quad (5.19)$$

mens den inverse transformasjonen er

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x(j\omega)e^{j\omega t}d\omega \quad (5.20)$$

Innsetting av lign. (5.20) i lign. (5.18) gir

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)y^*(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x(j\omega)e^{j\omega t}d\omega \right] y^*(t)dt \quad (5.21)$$

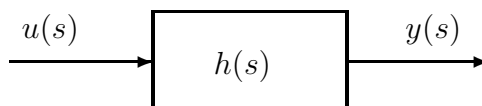
Ved å bytte om rekkefølgen på integrasjonene fås

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)y^*(t)dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x(j\omega) \left[\int_{-\infty}^{\infty} y^*(t)e^{j\omega t}dt \right] d\omega \quad (5.22)$$

Her er

$$\int_{-\infty}^{\infty} y^*(t)e^{j\omega t}dt = \left[\int_{-\infty}^{\infty} y(t)e^{-j\omega t}dt \right]^* = y^*(j\omega) \quad (5.23)$$

og teoremet følger derav. ■



Figur 5.2: Lineært tidsinvariant system

En viktig egenskap for lineære passive systemer skal nå presenteres:

Teorem 5.4 Gitt et lineært, tidsinvariant system med rasjonal transferfunksjon $h(s)$ definert ved

$$y(s) = h(s)u(s) \quad (5.24)$$

Anta at alle polene til $h(s)$ ligger i det åpne venstre halvplan. Da gjelder:

1. Systemet er passivt $\Leftrightarrow \operatorname{Re}[h(j\omega)] \geq 0$ for alle ω .

¹I lærebøker i matematikk brukes ofte andre konvensjoner for Fouriertransformasjonspar. I [21] brukes f.eks. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} C(w)e^{iwx}dw$ og $C(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-iwx}dx$. Innen elektroteknikk brukes definisjonen presentert her siden dette resulterer i tidssignalet og frekvensspekteret som Fouriertransformasjonspar.

2. Systemet er strengt passivt \Leftrightarrow Det fins en $\delta > 0$ slik at $\operatorname{Re}[h(j\omega)] \geq \delta > 0$ for alle ω .

Bevis: For å kunne bruke Parsevals teorem, hvor integrasjonen er over $t \in [0, \infty)$ i motsetning til i definisjonen av passivitet hvor integrasjonen er over $t \in [0, T]$, introduseres den avkortede funksjonen

$$u_T(t) = \begin{cases} u(t) & \text{hvis } t \leq T \\ 0 & \text{ellers} \end{cases} \quad (5.25)$$

som er lik $u(t)$ for alle t mindre eller lik T , og deretter lik null. Den Fouriertransformerte av $u_T(t)$, som betegnes $u_T(j\omega)$, benyttes i Parsevals teorem.

Anta at $y(t)$ og $u(t)$ er lik null for $t \leq 0$. Da gjelder:

$$\int_0^T y(t)u(t)dt = \int_0^\infty y(t)u_T(t)dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty y(j\omega)u_T^*(j\omega)d\omega \quad (5.26)$$

som fås av Parsevals teorem. Innsetting av $y(j\omega) = h(j\omega)u_T(j\omega)$ gir

$$\int_0^T y(t)u(t)dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty h(j\omega)u_T(j\omega)u_T^*(j\omega)d\omega \quad (5.27)$$

hvor

$$h(j\omega)u_T(j\omega)u_T^*(j\omega) = \{\operatorname{Re}[h(j\omega)] + j\operatorname{Im}[h(j\omega)]\}|u_T(j\omega)|^2 \quad (5.28)$$

$\operatorname{Re}[\cdot]$ betegner realdelen og $\operatorname{Im}[\cdot]$ betegner imaginærdelen. Venstresiden av (5.27) er reell, og dette betyr at imaginærdelen av høyresiden er lik null². Dermed gjelder

$$\int_0^T u(t)y(t)dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \operatorname{Re}[h(j\omega)]|u_T(j\omega)|^2d\omega \quad (5.29)$$

Anta at $\operatorname{Re}[h(j\omega)] \geq \delta \geq 0$ for alle ω . Da er

$$\int_0^T u(t)y(t)dt \geq \frac{\delta}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty |u_T(j\omega)|^2d\omega = \delta \int_0^T u^2(t)dt \quad (5.30)$$

hvor likheten kommer som en følge av Parsevals teorem. Systemet er dermed passivt og i tillegg strengt passivt hvis $\delta > 0$.

Anta så at systemet er passivt. Det eksisterer da en $\delta \geq 0$ slik at

$$\int_0^T y(t)u(t)dt \geq \beta + \delta \int_0^T u^2(t)dt \quad (5.31)$$

hvor $\delta = 0$ for et passivt system, mens $\delta > 0$ for et strengt passivt system. Anta at pådraget er $u(t) = \cos \omega_0 t$ for en vilkårlig ω_0 . Med passende initialbetingelser er da

$$y(t) = |h(j\omega_0)| \cos[\omega_0 t + \angle h(j\omega_0)]$$

og det følger at

$$\begin{aligned} \int_0^T y(t)u(t)dt &= \int_0^T |h(j\omega_0)| \cos \omega_0 t \cos[\omega_0 t + \angle h(j\omega_0)]dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^T |h(j\omega_0)| \cos[\angle h(j\omega_0)]dt \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_0^T |h(j\omega_0)| \cos[2\omega_0 t + \angle h(j\omega_0)]dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^T \operatorname{Re}[h(j\omega_0)]dt + \frac{1}{2} \int_0^T |h(j\omega_0)| \cos[2\omega_0 t + \angle h(j\omega_0)]dt \end{aligned}$$

²Dette stemmer forøvrig med det generelle resultatet at $\operatorname{Im}[h(j\omega)] = -\operatorname{Im}[h(-j\omega)]$.

hvor identiteten $2 \cos x \cos y = \cos(x - y) + \cos(x + y)$ er brukt. I siste linje vil det første integralet dominere for store T , og vi får

$$\int_0^T y(t)u(t)dt \rightarrow \frac{T}{2} \operatorname{Re}[h(j\omega_0)] \quad \text{når } T \rightarrow \infty \quad (5.32)$$

Videre finner vi at

$$\delta \int_0^T u^2(t)dt = \delta \int_0^T \cos^2 \omega_0 t dt \rightarrow \frac{T}{2} \delta \quad \text{når } T \rightarrow \infty \quad (5.33)$$

Anta at $\operatorname{Re}[h(j\omega_0)] < \delta$. Da vil

$$\int_0^T y(t)u(t)dt - \delta \int_0^T u^2(t)dt \rightarrow \frac{T}{2} (\operatorname{Re}[h(j\omega_0)] - \delta) \rightarrow -\infty \quad (5.34)$$

når $T \rightarrow \infty$. Dette strider mot ligning (5.31), og siden ω_0 er vilkårlig må vi ha $\operatorname{Re}[h(j\omega)] \geq \delta$ for alle ω . Bare hvis delen er dermed vist for passive systemer ved å anta $\delta = 0$, og for strengt passive systemer ved å anta $\delta > 0$. ■

Kommentar 5.2 En transferfunksjon $h(s)$ er **rasjonal** hvis den er forholdet mellom to polynomer i den komplekse variabel s , dvs. hvis den kan skrives på formen

$$h(s) = \frac{Q(s)}{R(s)} \quad (5.35)$$

hvor $Q(s)$ og $R(s)$ er polynomer i s . Et eksempel på en transferfunksjon som ikke er rasjonal er $h(s) = \tanh s$ som forekommer i forbindelse med systemer beskrevet med partielle differensialligninger. ■

Eksempel 5.1 Legg merke til at $\operatorname{Re}[h(j\omega)] > 0$ ikke er en tilstrekkelig betingelse for at det skal eksistere en $\delta > 0$ slik at $\operatorname{Re}[h(j\omega_0)] \geq \delta > 0$ for alle ω . Et eksempel på dette er

$$h_1(s) = \frac{1}{1 + Ts} \quad (5.36)$$

Vi finner at $\operatorname{Re}[h_1(j\omega)] > 0$ for alle ω siden

$$h_1(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega T} = \frac{1}{1 + (\omega T)^2} - j \frac{\omega T}{1 + (\omega T)^2} \quad (5.37)$$

Det fins imidlertid ingen $\delta > 0$ slik at $\operatorname{Re}[h(j\omega_0)] \geq \delta > 0$ for alle ω . For en vilkårlig $\delta > 0$ vil nemlig

$$\operatorname{Re}[h_1(j\omega)] = \frac{1}{1 + (\omega T)^2} < \delta \quad \text{for alle } \omega > \frac{1}{T} \sqrt{\frac{1-\delta}{\delta}} \quad (5.38)$$

Dette betyr at $h_1(s)$ ikke er strengt passiv. ■

Eksempel 5.2 Gitt prosessen

$$h_2(s) = \frac{s + c}{(s + a)(s + b)} \quad (5.39)$$

hvor a , b og c er positive konstanter. Vi finner at

$$\begin{aligned} h_2(j\omega) &= \frac{j\omega + c}{(j\omega + a)(j\omega + b)} \\ &= \frac{(c + j\omega)(a - j\omega)(b - j\omega)}{(a^2 + \omega^2)(b^2 + \omega^2)} \\ &= \frac{abc + \omega^2(a + b - c) + j[\omega(ab - ac - bc) - \omega^3]}{(a^2 + \omega^2)(b^2 + \omega^2)} \end{aligned} \quad (5.40)$$

Det fremgår at

1. Hvis $c \leq a + b$, så er $\operatorname{Re}[h_2(j\omega)] > 0$ for alle ω . Siden $\operatorname{Re}[h_2(j\omega)] \rightarrow 0$ når $\omega \rightarrow \infty$, så er ikke $h_2(s)$ strengt passiv.
2. Hvis $c > a + b$, er ikke $h_2(s)$ passiv siden $\operatorname{Re}[h_2(j\omega)] < 0$ for $\omega > \sqrt{abc/(c - a - b)}$.

■

Eksempel 5.3 Prosessene

$$h_3(s) = 1 + Ts \quad (5.41)$$

$$h_4(s) = \frac{1 + T_1s}{1 + T_2s}, \quad T_1 < T_2 \quad (5.42)$$

er strengt passive siden

$$\operatorname{Re}[h_3(j\omega)] = 1 \quad (5.43)$$

og

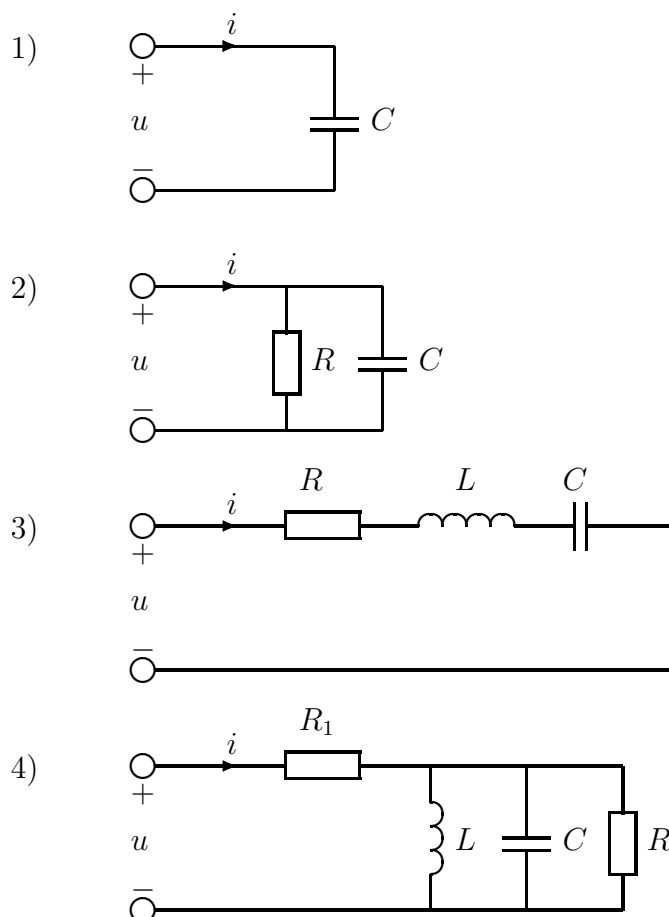
$$\operatorname{Re}[h_4(j\omega)] = \frac{1 + \omega^2 T_1 T_2}{1 + (\omega T_2)^2} \in \left(\frac{T_1}{T_2}, 1\right] \quad (5.44)$$

■

I stedet for å karakterisere lineære, passive systemer med alle polene er i det åpne venstre halvplan ved realdelen til transferfunksjonen, kan det være nyttig å uttrykke samme betingelse ved fasen til transferfunksjonen:

- Systemet er passivt $\Leftrightarrow |\angle h(j\omega)| \leq 90^\circ$ for alle ω
- Systemet er strengt passivt $\Rightarrow |\angle h(j\omega)| < 90^\circ$ for alle ω

Legg merke til at $|\angle h(j\omega)| < 90^\circ$ for alle ω bare er en nødvendig betingelse for streng passivitet. Det fins ikke en tilstrekkelig betingelse på fasen til $h(j\omega)$ for streng passivitet.



Figur 5.3: Passive elektriske enporter

Eksempel 5.4 En elektrisk enport med motstander, spoler og kondensatorer er passiv når spenning inn på kretsen er pådrag og strøm inn på kretsen er måling, eller strøm er pådrag og spenning er måling.

I figur 5.3 er ulike passive enporter vist. Pådrag er spenning inn på systemet, mens måling er strøm inn på systemet. Transferfunksjonene er således admittanser, som er inverse impedanser. Krets 1 er en kondensator, krets 2 er en motstand i parallell med en kondensator, krets 3 er en motstand i serie med en spole og en kondensator, mens krets 4 er en motstand i serie med en parallellkobling av en spole, en kondensator og en motstand. Transferfunksjonene er:

$$h_1(s) = Cs \quad (5.45)$$

$$h_2(s) = \frac{1}{R}(1 + RCs) \quad (5.46)$$

$$h_3(s) = \frac{Cs}{1 + RCs + LCs^2} \quad (5.47)$$

$$h_4(s) = \frac{1}{R_1} \frac{1 + \frac{L}{R}s + LCs^2}{1 + (\frac{L}{R_1} + \frac{L}{R})s + LCs^2} \quad (5.48)$$

Systemene 1, 2, 3 og 4 er passive siden de har alle polene i det åpne venstre halvplan, og $\text{Re}[h_i(j\omega)] \geq 0$ for alle ω og $i \in \{1, 2, 3, 4\}$. Systemene har fase $|\angle h_i(j\omega)| \leq 90^\circ$. I

tillegg er system 2 strengt passivt siden $\operatorname{Re}[h_2(j\omega)] = 1/R > 0$ for alle ω . For system 4 finner vi at

$$\operatorname{Re}[h_4(j\omega)] = \frac{1}{R_1} \frac{(1 - \omega^2 a)^2 + \omega^2 bc}{(1 - \omega^2 a)^2 + \omega^2 c^2} \quad (5.49)$$

hvor $a = LC$, $b = LR^{-1}$ og $c = L(R_1^{-1} + R^{-1})$. Siden $b < c$ er $b^{-1} - c^{-1} > 0$ og

$$\frac{(1 - \omega^2 a)^2 + \omega^2 bc}{(1 - \omega^2 a)^2 + \omega^2 c^2} = \frac{b}{c} \left[\frac{\frac{1}{c}(1 - \omega^2 a)^2 + \omega^2 c}{\frac{1}{c}(1 - \omega^2 a)^2 + \omega^2 c} + \frac{(\frac{1}{b} - \frac{1}{c})(1 - \omega^2 a)^2}{\frac{1}{c}(1 - \omega^2 a)^2 + \omega^2 c} \right] \geq \frac{b}{c} \quad (5.50)$$

Dette medfører $\operatorname{Re}[h_4(j\omega)] \geq b/(R_1 c) = 1/(R_1 + R) > 0$ for alle ω , hvilket vil si at $h_4(s)$ er strengt passiv. ■

Hittil har vi forutsatt at alle polene til $h(s)$ har realdel mindre enn null. Det fins imidlertid lineære tidsinvariante systemer med poler på imaginæraksen som er passive, hvilket demonstreres i følgende eksempel:

Eksempel 5.5 Gitt systemet $\dot{y}(t) = u(t)$ som på Laplacetransformert form beskrives med $y(s) = h(s)u(s)$ hvor $h(s) = \frac{1}{s}$. Prosessen har dermed en pol i origo, som ligger på den imaginære akse. Her er $\operatorname{Re}[h(j\omega)] = 0$ for alle ω , men vi kan ikke benytte teorem 5.4 siden dette teoremet kun gjelder for prosesser med alle polene i det åpne venstre halvplan, dvs. alle polene må ha negativ realdel. Vi finner imidlertid at

$$\int_0^T y(t)u(t)dt = \int_0^T y(t)\dot{y}(t)dt \quad (5.51)$$

Et variabelskifte $ydt = dy$ gir

$$\int_0^T y(t)u(t)dt = \int_{y(0)}^{y(T)} y(t)dy = \frac{1}{2}[y(T)^2 - y(0)^2] \geq -\frac{1}{2}y(0)^2 \quad (5.52)$$

og passivitet er dermed påvist med $\beta = -\frac{1}{2}y(0)^2$. ■

Det viser seg å være vesentlig mer komplisert å finne betingelser på $h(j\omega)$ for passivitet for systemer som kan ha poler på imaginæraksen. Resultatet er imidlertid relativt enkelt og er gitt i følgende teorem:

Teorem 5.5 Gitt en rasjonal transferfunksjon $h(s)$. Da er $h(s)$ passiv hvis og bare hvis

1. $h(s)$ ikke har poler i det åpne høyre halvplan.
2. $\operatorname{Re}[h(j\omega)] \geq 0$ for alle ω som er slik at $j\omega$ ikke er en pol for $h(s)$.
3. Hvis $j\omega_0$ er en pol for $h(s)$, så er den en enkel pol, og residuet i $s = j\omega_0$ er reelt og større enn null, dvs. $\operatorname{Res}_{s=j\omega_0} h(s) = \lim_{s \rightarrow j\omega_0} (s - j\omega_0)h(s) > 0$.

Dette er bevist i kapittel 5.19. ■

Fra stabilitetsteorien for lineære tidsinvariante systemer (appendiks A.2) har vi at hvis $h(s)$ ikke har poler i det åpne høyre halvplan, og alle poler på imaginæraksen er enkle, så er systemet $y(s) = h(s)u(s)$ stabilt med null pådrag. Av teorem 5.5 kan vi dermed konkludere at:

Korollar 5.2 Hvis $h(s)$ er passiv, så er $h(s)$ stabil med null pådrag. ■

Påstand 5.1 Gitt en rasjonal transferfunksjon

$$h(s) = \frac{(s + z_1)(s + z_2) \dots}{s(s + p_1)(s + p_2) \dots} \quad (5.53)$$

hvor $\operatorname{Re}[p_i] > 0$ og $\operatorname{Re}[z_i] > 0$ hvilket vil si at $h(s)$ har en pol i origo og de øvrige polene i det åpne venstre halvplan, mens alle nullpunktene er i det åpne venstre halvplan. Da er $h(s)$ passiv hvis og bare hvis $\operatorname{Re}[h(j\omega)] \geq 0$ for alle ω .

Bevis: Vi finner residuet for polen på imaginæraksen:

$$\operatorname{Res}_{s=0} h(s) = \frac{z_1 z_2 \dots}{p_1 p_2 \dots} \quad (5.54)$$

Her er enten z_i og p_i reelle og positive, eller de kan opptre i komplekskonjugerte par hvor produktet $z_i z_i^* = |z_i|^2$ eller $p_i p_i^* = |p_i|^2$ som er reelt og positivt. Dermed er residuet i origo reelt og positivt. Siden $h(s)$ ikke har poler i det åpne høyre halvplan er dermed $h(s)$ passiv hvis og bare hvis $\operatorname{Re}[h(j\omega)] \geq 0$ for alle ω . ■

Eksempel 5.6 Gitt de to prosessene

$$h_1(s) = \frac{s^2 + a^2}{s(s^2 + \omega_0^2)}, \quad a \neq 0, \omega_0 \neq 0 \quad (5.55)$$

$$h_2(s) = \frac{s}{s^2 + \omega_0^2}, \quad \omega_0 \neq 0 \quad (5.56)$$

De to prosessene har poler kun på imaginæraksen, slik at betingelse 1 i teorem 5.5 er oppfylt. Videre er

$$h_1(j\omega) = -j \frac{a^2 - \omega^2}{\omega(\omega_0^2 - \omega^2)} \quad (5.57)$$

$$h_2(j\omega) = j \frac{\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad (5.58)$$

slik at også betingelse 2 er oppfylt siden $\operatorname{Re}[h_1(j\omega)] = \operatorname{Re}[h_2(j\omega)] = 0$ for alle ω som er slik at $j\omega$ ikke er en pol for transferfunksjonen. For å undersøke betingelse 3 må vi beregne residuene. Vi har

$$\operatorname{Res}_{s=0} h_1(s) = \frac{a^2}{\omega_0^2} \quad (5.59)$$

$$\operatorname{Res}_{s=\pm j\omega_0} h_1(s) = \frac{\omega_0^2 - a^2}{2\omega_0^2} \quad (5.60)$$

$$\operatorname{Res}_{s=\pm j\omega_0} h_2(s) = \frac{1}{2} \quad (5.61)$$

Vi ser at ifølge teorem 5.5 er $h_2(s)$ passiv, mens $h_1(s)$ er passiv hvis $a < \omega_0$ som svarer til at $|\angle h_1(j\omega)| \leq 90^\circ$ for alle ω . ■

Eksempel 5.7 Gitt prosessen

$$h(s) = -\frac{1}{s} \quad (5.62)$$

som ikke har poler i det åpne høyre halvplan, og som oppfyller $\operatorname{Re}[h(j\omega)] \geq 0$ for alle $\omega \neq 0$. Imidlertid er $\operatorname{Res}_{s=0}h(s) = -1$, og det følger av teorem 5.5 at prosessen ikke er passiv. Dette stemmer overens med

$$\int_0^T y(t)u(t)dt = -\int_{y(0)}^{y(T)} y(t)dy = \frac{1}{2}[y(0)^2 - y(T)^2] \quad (5.63)$$

som ikke har noen nedre begrensning siden $y(T)$ kan bli vilkårlig stor. ■

5.5 Passivitetsegenskaper for PID-regulatorer

Påstand 5.2 Anta at $0 \leq T_d < T_i$ og $0 \leq \alpha \leq 1$. Da er PID-regulatoren

$$h_r(s) = K_p \frac{1 + T_i s}{T_i s} \frac{1 + T_d s}{1 + \alpha T_d s} \quad (5.64)$$

passiv.

Dette følger av påstand 5.1. ■

Påstand 5.3 Anta at en PID-regulatoren har begrenset integralvirkning og begrenset derivatvirkning, dvs. at $0 \leq T_d < T_i$, $1 \leq \beta < \infty$ og $0 < \alpha \leq 1$. Da vil regulatorens transferfunksjon

$$h_r(s) = K_p \beta \frac{1 + T_i s}{1 + \beta T_i s} \frac{1 + T_d s}{1 + \alpha T_d s} \quad (5.65)$$

oppfylle følgende betingelser:

1. $|h_r(j\omega)| \leq \frac{K_p \beta}{\alpha}$ for alle ω .
2. $\operatorname{Re}[h_r(j\omega)] \geq K_p$ for alle ω , hvilket vil si at h_r er strengt passiv.

Bevis: Fra vanlig frekvensanalyse for transferfunksjoner har vi at

$$|h_r(j\omega)| \leq K_p \beta \cdot 1 \cdot \frac{1}{\alpha} = \frac{K_p \beta}{\alpha} \quad (5.66)$$

hvilket skulle vises. Streng passivitet vises som følger: Vi setter

$$h_i(j\omega) = \frac{1 + j\omega T_i}{1 + \beta j\omega T_i} = \frac{1 + \beta\omega^2 T_i^2 - j(\beta - 1)\omega T_i}{1 + (\beta\omega T_i)^2} \quad (5.67)$$

$$h_d(j\omega) = \frac{1 + j\omega T_d}{1 + \alpha j\omega T_d} = \frac{1 + \alpha\omega^2 T_d^2 - j(\alpha - 1)\omega T_d}{1 + (\alpha\omega T_d)^2} \quad (5.68)$$

som gir

$$h_r(j\omega) = K_p \beta h_i(j\omega) h_d(j\omega) \quad (5.69)$$

For komplekse tall z_1 og z_2 gjelder generelt

$$\operatorname{Re}[z_1 z_2] = \operatorname{Re}[z_1] \operatorname{Re}[z_2] - \operatorname{Im}[z_1] \operatorname{Im}[z_2] \quad (5.70)$$

Dermed er

$$\operatorname{Re}[h_r(j\omega)] = K_p \beta \frac{(1 + \beta\omega^2 T_i^2)(1 + \alpha\omega^2 T_d^2) - (\alpha - 1)(\beta - 1)\omega^2 T_i T_d}{[1 + (\beta\omega T_i)^2][1 + (\alpha\omega T_d)^2]} \quad (5.71)$$

Siden $(\alpha - 1)(\beta - 1) \leq 0$ er

$$\operatorname{Re}[h_r(j\omega)] \geq K_p \beta \frac{(1 + \beta\omega^2 T_i^2)(1 + \alpha\omega^2 T_d^2)}{[1 + (\beta\omega T_i)^2][1 + (\alpha\omega T_d)^2]} \quad (5.72)$$

Her er

$$\frac{1 + \beta\omega^2 T_i^2}{1 + (\beta\omega T_i)^2} = \frac{\beta^{-1} + \beta\omega^2 T_i^2}{\beta(\beta^{-1} + \beta\omega^2 T_i^2)} + \frac{1 - \beta^{-1}}{\beta(\beta^{-1} + \beta\omega^2 T_i^2)} \geq \frac{1}{\beta}$$

siden $1 - \beta^{-1} \leq 0$. Videre er

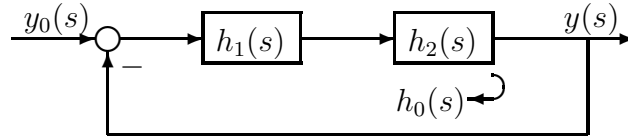
$$\frac{1 + \alpha\omega^2 T_d^2}{1 + (\alpha\omega T_d)^2} = \frac{1 + (\alpha\omega T_d)^2}{1 + (\alpha\omega T_d)^2} + \frac{\alpha\omega^2 T_d^2(1 - \alpha)}{1 + (\alpha\omega T_d)^2} \geq 1$$

siden $1 - \alpha \geq 0$. Dermed er

$$\operatorname{Re}[h_r(j\omega)] \geq K_p \quad (5.73)$$

og streng passivitet er vist. ■

5.6 Stabilitet av tilbakekoblede passive systemer



Figur 5.4: Tilbakekoblet system med passiv $h_1(s)$ og strengt passiv $h_2(s)$

Anta at et lineært tilbakekoblet system har sløyfetransferfunksjon $h_0(s) = h_1(s)h_2(s)$ som vist i figur 5.4. Hvis h_1 er passiv og h_2 er strengt passiv, så er fasen begrenset av

$$|\angle h_1(j\omega)| \leq 90^\circ \quad \text{og} \quad |\angle h_2(j\omega)| < 90^\circ \quad (5.74)$$

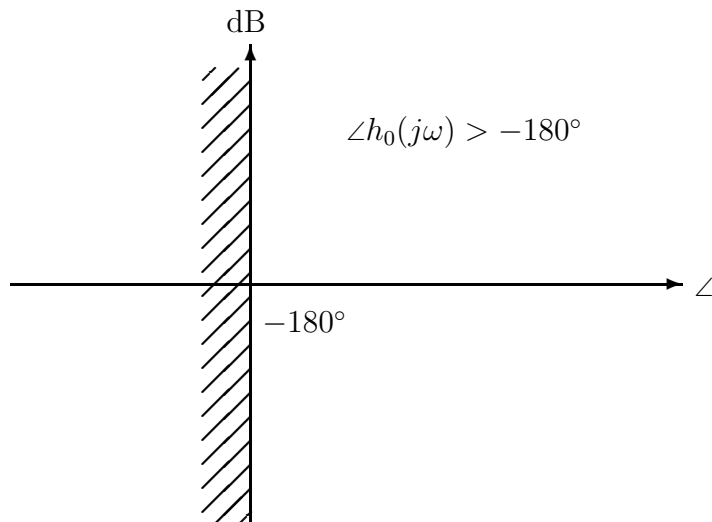
Sløyfetransferfunksjonen $h_0(s)$ har følgelig fase begrenset av

$$|\angle h_0(j\omega)| < 180^\circ \quad (5.75)$$

hvilket er illustrert i figur 5.5.

Siden h_1 og h_2 er passive, har ikke $h_0(s)$ poler i det åpne høyre halvplan. Dette betyr ifølge vanlig stabilitetsteori for lineære systemer som ikke har poler i høyre halvplan (f.eks. Nyquists kriterium), at systemet er asymptotisk stabilt og dermed også begrenset-inngang-begrenset-utgang-stabilt. Tilsvarende resultat fås hvis h_1 er strengt passiv og h_2 er passiv.

Ifølge påstand 5.3 er en begrenset PID-regulator strengt passiv. Dette betyr at:



Figur 5.5: Begrensning på fase for en sløyfetransferfunksjon som er produktet av to passive transferfunksjoner.

- Et passivt lineært system med en PID-regulator med begrenset integral- og derivatvirkning er begrenset-inngang-begrenset-utgang-stabilt.

For en viktig klasse prosesser er passivitet eller streng passivitet en strukturell egenskap som ikke avhenger av prosessmodellens parametere. Dette betyr at passivitetsbetraktninger kan brukes til å påvise stabilitet for et tilbakekoblet system selv om det er stor usikkerhet eller store variasjoner i systemets parametere. Passivitetsbetraktninger gir imidlertid ikke informasjon om det lukkede systems ytelse. Det er derfor viktig at man i kombinasjon med passivitetsbetraktninger benytter en annen designmetode, som f.eks. bruk av Bodediagram, for å oppnå god ytelse for nominelle parametere. Dette resulterer i et reguleringsystem som har høy ytelse under normale driftsforhold, og som i tillegg er stabilt selv for store parametervariasjoner.

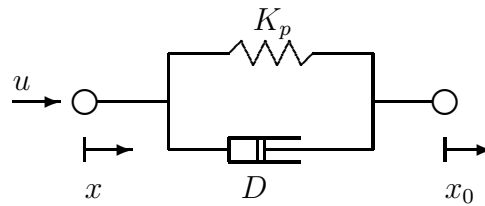
5.7 Mekaniske ekvivalenter for PD-regulatorer

Vi skal her se på mekaniske ekvivalenter for PD-regulatorer for posisjonsstyring når pådraget er påtrykt kraft. Motivasjonen for å ta med dette her er å gi videre innsikt i posisjonsstyring ved bruk av PD-regulatorer. Legg imidlertid merke til at en PD-regulator fra posisjon tilsvarer en PI-regulator fra hastighet. Siden kraft er pådraget i det følgende, må målingen være hastighet for at prosessen skal være passiv. Vi kunne derfor ha kalt regulettorene i dette kapitlet for PI-regulatorer.

Vi betrakter en masse m med posisjon x og hastighet $v = \dot{x}$. Dynamisk modell er $m\ddot{x} = u$ hvor kraften u er pådrag. Posisjonsreferansen er x_0 , mens hastighetsreferansen er $v_0 = \dot{x}_0$. En PD-regulator $u = K_p(1 + T_d s)(x_0 - x)$ benyttes. Regulettoren kan skrives

$$u = K_p(x_0 - x) + D(v_0 - v) \quad (5.76)$$

hvor $D = K_p T_d$. Den mekaniske ekvivalenten fremkommer nå ut fra observasjonen at dette er kraften som oppstår hvis massen m med posisjon x forbindes med et punkt



Figur 5.6: Mekanisk ekvivalent for PD-regulator ved tilbakekobling fra posisjon

med posisjon x_0 med en parallellkobling av en fjær med fjærkonstant K_p og en demper med koeffisient D , hvilket er vist i figur 5.6.

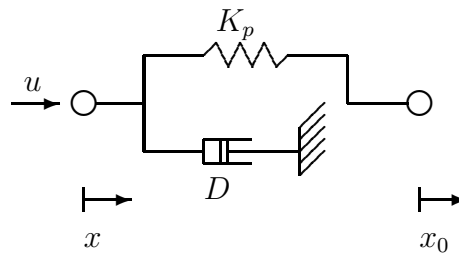
Hvis hastighetsreferansen ikke er gitt og posisjonsreferansen inneholder sprang, kan en PD2-regulator benyttes. Da er pådraget

$$u = K_p x_0 - K_p(1 + T_d s)x$$

som tilsvare

$$u_{PD2} = K_p(x_0 - x) - Dv \quad (5.77)$$

Dette er kraften som oppstår hvis massen m forbindes med en fjær med fjærkonstant K_p til et punkt med posisjon x_0 og en demper med koeffisient D til et fast punkt, hvilket er illustrert i figur 5.7.



Figur 5.7: Mekanisk ekvivalent for PD-regulator uten hastighetsreferanse ved tilbakekobling fra posisjon

Hvis hastigheten ikke måles bruker man gjerne en begrenset PD-regulator som gir pådraget

$$u(s) = K_p \frac{1 + T_d s}{1 + \alpha T_d s} [x_0(s) - x(s)] \quad (5.78)$$

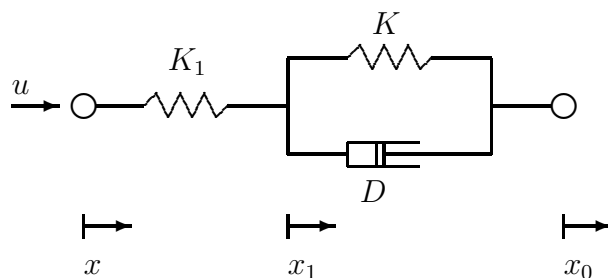
hvor $0 \leq \alpha \leq 1$. Vi skal nå se at denne transferfunksjonen fremkommer ved å forbinde massen m med posisjon x med et punkt med posisjon x_0 ved bruk av en fjær med fjærkonstant K_1 i serie med en parallellkobling av en fjær med fjærkonstant K og en demper med koeffisient D som vist i figur 5.8.

La x_1 være posisjonen til forbindelsespunktet mellom fjæren K_1 og parallellkoblingen. Da er fjærkraften $u = K_1(x_1 - x)$, og Laplacetransformasjon gir $x_1(s) = x(s) + u(s)/K_1$. Siden det ikke er noen masse i punktet x_1 må en motkraft av samme størrelse virke fra parallellkoblingen av fjær og demper, slik at

$$u(s) = K[x_0(s) - x_1(s)] + D[v_0(s) - v_1(s)] = (K + Ds)[x_0(s) - x_1(s)] \quad (5.79)$$

Innsetting av $x_1(s)$ gir

$$u(s) = (K + Ds)[x_0(s) - x(s) - \frac{1}{K_1}u(s)] \quad (5.80)$$



Figur 5.8: Mekanisk ekvivalent for begrenset PD-regulator ved tilbakekobling fra posisjon

Vi løser ut $u(s)$ og får

$$\begin{aligned} u(s) &= K_1 \frac{K + Ds}{K_1 + K + Ds} [x_0(s) - x(s)] \\ &= \frac{K_1 K}{K_1 + K} \frac{1 + \frac{D}{K}s}{1 + \frac{K}{K_1 + K} \frac{D}{K}s} [x_0(s) - x(s)] \end{aligned} \quad (5.81)$$

Vi ser at dette er en PD-regulator med begrenset derivatvirkning hvor

$$K_p = \frac{K_1 K}{K_1 + K} \quad (5.82)$$

$$T_d = \frac{D}{K} \quad (5.83)$$

$$\alpha = \frac{K}{K_1 + K} \in [0, 1) \quad (5.84)$$

5.8 Aktiv fjæring for biler

Vi skal i det følgende se på aktiv fjæring for biler hvor vi skal bruke passivitetsbetraktninger og benytte mekaniske ekvivalenter av regulatorene for å gi en forståelse av virkemåten. Fjæringssystemet til en bil må virke under sterkt varierende forhold både hva angår veiens kvalitet og fysiske parametere som dekktrykk, bilens vekt og temperaturvarierende viskositet og elastisitet. Det er derfor viktig å velge en regulatorløsning som er stabil under alle forhold. Bruk av passive regulatorstrukturer, som er basert på dissipering av energi, er en gunstig løsning på dette problemet.

I en vanlig bil består fjæringssystemet på hvert hjul av en fjær i parallell med en demper mellom karosseri og hjulaksling, som illustrert i figur 5.9. Det er interessant å legge merke til at dette tilsvarer at det er en PD-regulator på hvert hjul med tilbakekobling fra posisjonsdifferansen mellom hjulaksling og karosseri. Dette er en passiv regulator, og siden prosessen er passiv så kan det vises at det lukkede system er stabilt.

En vanlig bil vil krenge utover i en sving, og i store hastigheter vil fjæringssystemet på ytterhjulene bli sterkt komprimert. Dette vil føre til at ujevnheter i veien ikke vil bli opptatt av fjæringssystemet, men forplanter seg til karosseriet. Dette gir komfortproblemer og begrenser kvaliteten på kjøreegenskapene til bilen. Det har vært utført forsøk med å oppheve krenkning i sving ved å bruke aktiv fjæring. Et aktivt fjæringssystem benytter en hydraulisk arbeidssylinder, som er en hydraulisk lineærmotor, på hvert hjul i stedet for et konvensjonelt hjuloppheng som har en fjær og en støtdemper. I

Figur 5.9: *Bil med konvensjonell fjæring ved en fjær og en demper på hvert hjuloppheng. Dette er den mekaniske ekvivalenten til kraftpådrag generert ved tilbakekobling med PD-regulator fra posisjonsavvik mellom karosseri og hjulaksling.*

aktiv fjæring ønsker man å bruke kraften som virker på bilens karosseri som pådrag, og derfor benyttes kraftstyring på den hydrauliske arbeidssylinderen. Den hydrauliske arbeidssylinderen styres med en elektrohydraulisk servventil. Dette er vist i figur 5.10.

Figur 5.10: *Prinsippskisse for kraftstyring av hydraulisk aktuator i aktivt fjæringssystem*

Vi betrakter en av arbeidssylinderene. Pådraget er sleideposisjonen x_v til servoven-tilen, mens måling er kraft F fra sylindren på bilen. Lasttrykket p_L er gitt ved

$$p_L(s) = \frac{\frac{K_q m_t}{A_p^2} s x_v(s) - \frac{1}{A_p} F_L(s)}{1 + 2\zeta_h \frac{s}{\omega_h} + \frac{s^2}{\omega_h^2}} \quad (5.85)$$

Her er A_p er sylindrens tverrsnitt, m_t massen av hjul og hjuloppheng, F_L er kraften fra vegbanen på hjulet og ω_h er den hydrauliske resonansfrekvensen. De øvrige størrelsene er som definert i kapittel 3.3.4. Hvis vi antar at massen til den hydrauliske sylindren

er liten vil vi ha at $F = A_p p_L$. Kraften fra sylindren på bilen er dermed gitt av

$$F(s) = \frac{\frac{K_q m_t}{A_p} s x_v(s) - F_L(s)}{1 + 2\zeta_h \frac{s}{\omega_h} + \frac{s^2}{\omega_h^2}} \quad (5.86)$$

Kraftreferansen betegnes F_0 . En kraftregulator

$$x_v(s) = h_r(s)[F_0(s) - F(s)] \quad (5.87)$$

benyttes. Her kan en en begrenset PI^2 regulator benyttes:

$$h_r(s) = K_p \frac{(1 + \frac{s}{\omega_2})^2}{s(1 + \frac{s}{\omega_1})} \quad (5.88)$$

hvor $\omega_1 \ll \omega_1 \leq \omega_h$. Dette gir en sløyfetransferfunksjon

$$h_0(s) = h_r(s)h_p(s) = \frac{K_p \frac{K_q m_t}{A_p} (1 + \frac{s}{\omega_2})^2}{(1 + \frac{s}{\omega_1})(1 + 2\zeta_h \frac{s}{\omega_h} + \frac{s^2}{\omega_h^2})} \quad (5.89)$$

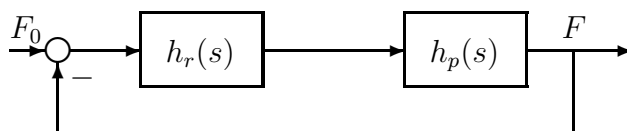
Kryssfrekvensen ω_c kan da velges høyere enn ω_h , men ω_c må være mindre enn knekkfrekvensene i servovalven. Kraften vil være gitt av

$$F(s) = M(s)F_0(s) \quad (5.90)$$

hvor $M(s) = h_0(s)/([1 + h_0(s)])$ er kraftsløfens følgeforshold. For frekvenser opp til kryssfrekvensen ω_c er $M(j\omega) \approx 1$, og vi kan bruke tilnærmelsen

$$F(s) = F_0(s) \quad (5.91)$$

Kraftsløfen er vist i figur 5.11.



Figur 5.11: Blokkdiagram for kraftstyring av hydraulisk aktuator i aktivt fjæringssystem

Det aktive fjæringssystemet kan da virke akkurat som et konvensjonelt fjæringssystem med en fjær og en demper ved å bruke kraftreferansen

$$F_0(s) = K_f[x_0(s) - x(s)] + D_s[v_0(s) - v(s)] = (K_f + D_s s)[x_0(s) - x(s)] \quad (5.92)$$

hvor K_f er fjærkonstanten og D_s er dempekonstanten. Her er x_0 referansen, $x_0 - x$ er utvidelsen av fjæren, mens $\dot{x}_0 = v_0$ og $\dot{x} = v$.

Når krengeing i sving skal oppheves, så kan ikke dette oppnås ved tilbakekobling fra x . Grunnen til dette er at fjærsystemet i så fall måtte hatt negativ K_f for å kunne krenge innover, og dette ville gitt positiv tilbakekobling og dermed ustabilitet. Løsningen på problemet er å benytte foroverkobling. Foroverkoblingen kan komme fra rattutslag og hastighetsmåling, eller for tog fra data over banens krumming som funksjon av posisjon langs banen. Her skal vi anta at foroverkoblingen kommer fra akselerometere

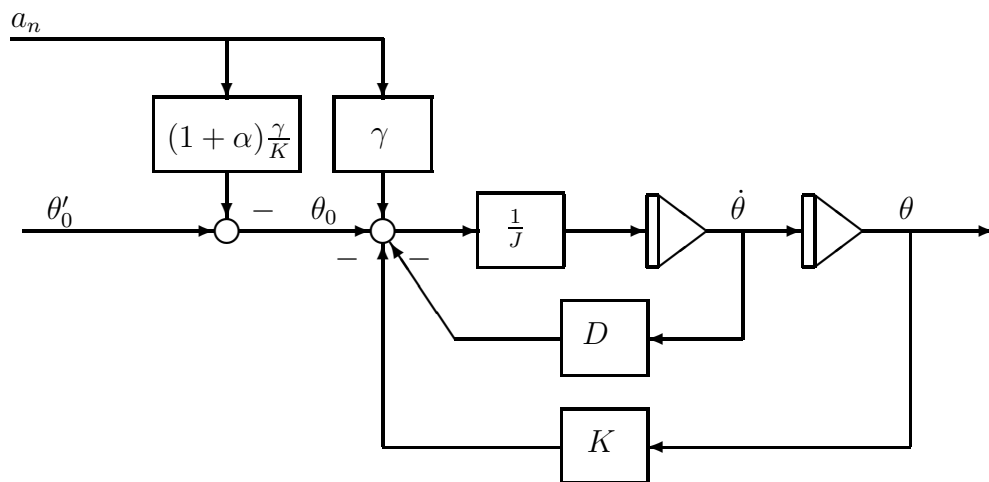
som gir akselerasjonsmåling på tvers av bilens bevegelsesretning, og at referansen x_0 for bilens fjæringssystem beregnes fra akselerasjonsmålingen. Vi antar at bilen har en PD-regulator på hvert hjul, og at modellen for bilens rotasjon om lengdeaksen, som betegnes rull, er gitt ved

$$J\ddot{\theta} = K(\theta_0 - \theta) + D(\dot{\theta}_0 - \dot{\theta}) + \gamma a_n \quad (5.93)$$

hvor J er bilens treghetsmoment om lengdeaksen, θ er rullvinkelen, θ_0 er referansen til rullvinkelen svarende til posisjonsreferansene til de aktive fjæringssystemene på hjulene, referansen a_n er normalakselerasjonen, γ er en konstant og γa_n er momentet som oppstår på grunn av sentrifugalkrefter. Dette er vist i figur 5.12, mens blokkdiagrammet er gitt i figur 5.13. Her er K fjærkonstanten som avhenger av proporsjonalforsterkningen til PD-regulatorene i hjulopphengene, mens D på tilsvarende måte er dempekoeffisienten. Vi antar at ved kjøring på rett veg benyttes $\theta_0 = 0$.



Figur 5.12: Oppheving av krengeing for av bil i sving ved foroverkobling akselerometer til aktiv fjæring. Bilen krenger en vinkel θ . Normalakselerasjonen a_n som er rettet innover i svingen. Akselerometermålinger i to posisjoner er indikert.



Figur 5.13: Blokkdiagram som viser foroverkobling for krengeing innover i sving for bil.

Anta at et akselerometer er montert ved hjulopphengnet og måler $y = a_n$. Foroverkoblingen

$$\theta_0 = -(1 + \alpha) \frac{\gamma}{K} y + \theta_0' \quad (5.94)$$

benyttes. Dette gir

$$J\ddot{\theta} = K(\theta_0' - \theta) + D(\dot{\theta}_0 - \dot{\theta}) - \alpha\gamma a_n \quad (5.95)$$

Her vil null krenkning oppnås hvis modellparameterene er perfekt kjent og $\alpha = 0$. Krenkning innover oppnås ved å velge $\alpha = 1$.

Problemer kan oppstå hvis akselerometeret plasseres ugunstig slik at målingen også avhenger av θ . Dette vil være tilfelle hvis f.eks. akselerometeret monteres i dashbordet. Da blir målingen $y = a_n - h\ddot{\theta}$ og resultatet blir

$$[J - (1 + \alpha)\gamma h]\ddot{\theta} = K(\theta'_0 - \theta) + D(\dot{\theta}_0 - \dot{\theta}) - \alpha\gamma a_n \quad (5.96)$$

Ytelsen kan i dette tilfelle bli vesentlig redusert, og for store α kan systemet bli ustabilt idet det får negativt treghetsmoment.

5.9 Luftputekatamaran

En katamaran er en båt med to parallelle skrog. En spesiell type katamaran er luftputekatamaranen, også betegnet som SES (*Surface Effect Ship*), som har en luftpute mellom de to skrogene. Luftputen oppnås med en elastisk forsegling foran og bak og en vifte som pumper luft inn mellom skrogene. Dette er skissert i figur 5.14. Vanligvis

z_g

y_g

z_g

x_g

Figur 5.14: *Luftputekatamaran*

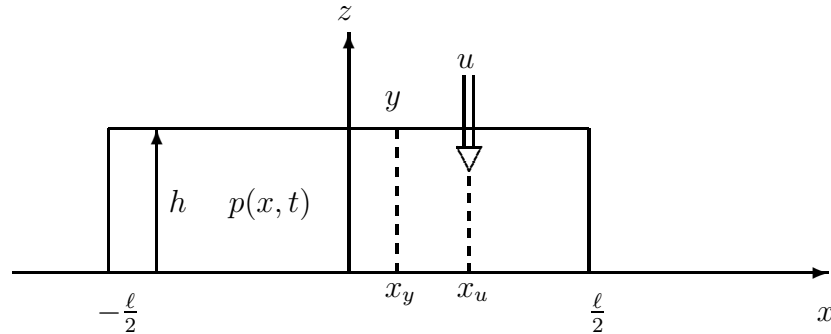
vil omlag 80% av fartøyets vekt hvile på luftputen, mens skrogene gir de resterende 20% oppdrift. Det er to fordeler ved å benytte luftputen: For det første reduseres motstanden i vannet på grunn av at skroget delvis løftes ut av vannet. Dermed kan hastigheter i overkant av 50 knop oppnås med dagens teknologi. For det andre reduseres bølgepåvirkningen på fartøyet, og høye hastigheter kan oppnås med akseptabel komfort med relativt store bølger. På grunn av katamaranskrogene er luftputekatamaranen i tillegg lettere å manøvrere enn en hovercraft.

Et problem med luftputekatamaraner er at det oppstår vibrasjoner som følge av resonans i luftputen ved små bølger som er typisk fjordsjø. Dette er et komfortproblem som begrenser markedspotensialet til denne typen skip til passasjertransport hvis det ikke løses på en tilfredsstillende måte. Resonansfrekvensene for en typisk luftputekatamaran med lengde 32 m er 2 Hz og 5 Hz. For å dempe disse vibrasjonene brukes et reguleringsystem for aktiv vibrasjonsdemping (*Ride Control System*) [39]. Dette gjøres

ved bruk av trykkmålere i luftputen og styrte spjeld som slipper ut luft fra luftputen. Måling i systemet er lufttrykket i luftputen, mens pådraget er spjeldåpning.

Den dynamiske modellen for systemet inkluderer hydrodynamikk for interaksjon mellom skrog og vann, akustisk dynamikk i luftputen og stivt legeme dynamikk for skipet. I utvikling av en modellstruktur som egner seg for regulatorutvikling er hovedproblemet å komme frem til en modell som er tilstrekkelig enkel og elegant, men som samtidig beskriver de essensielle dynamiske fenomener.

Vi skal her kun se på dynamikk forbundet med hivbevegelsen, som er skipets vertikale translasjon, og akustiske fenomener i luftputen. Anta at skipet har lengde ℓ , bredde b og at luftputen har stasjonær høyde h_0 . Det stasjonære volumet i luftputen er da $V_0 = \ell b h_0$, mens arealet av luftputen er $A = \ell b$. Lengdekoordinaten i skipets lengderetning betegnes x , og vi setter $x = -\ell/2$ akter og følgelig er $x = \ell/2$ i baugen. Lufttrykket i luftputen betegnes $p(x, t)$ idet p antas å være en funksjon av x og tiden t . Dette er illustrert i figur 5.15.



Figur 5.15: Modell av luftpute med pådrag u som er luftstrøm inn i luftputen i posisjon x_u , og måling y som er trykk i posisjon x_y .

Vi setter

$$p(x, t) = p_u(t) + p_d(x, t) \quad (5.97)$$

hvor $p_u(t)$ er det uniforme trykket og $p_d(x, t)$ er det romlig varierende trykket som skyldes akustiske fenomener, og som oppfyller

$$\int_0^\ell p_d(x, t) dx = 0 \quad (5.98)$$

Modellen for det uniforme trykket finnes av Newtons lov for vertikalbevegelsen og massebalansen for luften i puten:

$$m\ddot{h} = Ap_u \quad (5.99)$$

$$\frac{V_0}{\beta} \dot{p}_u = -Cp_u - A\dot{h} + u \quad (5.100)$$

Her er h luftputens høyde og dermed også skipet vertikale posisjon, m er skipets masse, $\beta = \rho c^2$ er luftens bulkmodul, ρ er tettheten av luft, c er lydhastigheten, C er lekkasjekoeffisienten, mens u er pådraget som er luftstrøm inn i luftputen i posisjon x_u . Transferfunksjonen fra pådraget q til trykket p_u blir

$$\frac{p_u}{q}(s) = \frac{\frac{m}{A^2} s}{1 + 2\zeta_u \frac{s}{\omega_u} + \frac{s^2}{\omega_u^2}} \quad (5.101)$$

hvor $\zeta_u = \frac{c}{2A}\sqrt{\beta m/V_0}$ og $\omega_u = \sqrt{\beta A/(hm)}$. Med $\ell = 28$ m, $b = 8$ m, $h_0 = 2$ m, $m = 140000$ kg og $\beta = c^2\rho = c^2 1.23\text{kg/m}^3$ og $c = 330\text{m/s}$ er $\omega_u = 10.35$ rad/s som tilsvarer 1.65 Hz.

Dynamikken til det romlig varierende trykket er gitt av bølgeligningen

$$\frac{\partial^2 p_d}{\partial t^2} + c^2 \frac{\partial^2 p_d}{\partial x^2} = 0 \quad (5.102)$$

hvor c er lydhastigheten. I tillegg må passende grensebetingelser, som blant annet involverer pådraget og bølgeeksitasjon, settes opp. Dette er behandlet i detalj i [39]. Det romlig varierende trykket kan skrives

$$p_d(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} p_{di}(x, t) \quad (5.103)$$

hvor

$$p_{di}(x, t) = q_i(t)\phi_i(x_y) \quad (5.104)$$

Her er $\phi_i(x)$ formfunksjoner som er konstante i tid, mens tidsfunksjonene $q_i(t)$ oppfyller

$$\frac{q_i}{u}(s) = \frac{b\phi_i(x_u)s}{s^2 + 2\zeta_i\omega_i s + \omega_i^2} \quad (5.105)$$

hvor b er en positiv konstant. Her er

$$\omega_i = c\pi i\ell \quad (5.106)$$

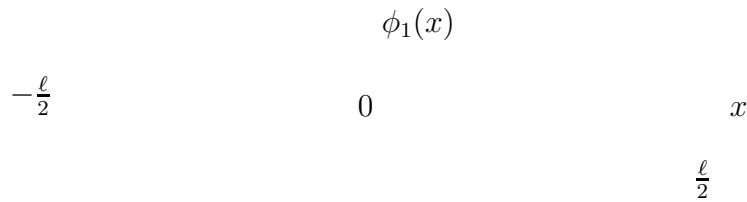
Første formfunksjon er

$$\phi_1(x) = \sin \pi x \quad (5.107)$$

som er vist i figur 5.16. Den assosierte resonansfrekvensen er

$$\omega_1 = c\pi/\ell = 37 \text{ rad/s} \quad (5.108)$$

som tilsvarer 5.9 Hz.



Figur 5.16: Første formfunksjon som har resonansfrekvens ω_1

Trykkmålingen foretas i posisjon x_y , og er

$$y(t) = p(x_y, t) = p_u(t) + \sum_{i=1}^{\infty} p_{di}(x_y, t) \quad (5.109)$$

Transferfunksjonen fra u til $p_{di}(x_y, t)$ er

$$\frac{p_{di}(x_y)}{u}(s) = \frac{b\phi_i(x_u)\phi_i(x_y)s}{s^2 + 2\zeta_i\omega_i s + \omega_i^2} \quad (5.110)$$

Først antar vi at måling og pådrag er kollokert, dvs. at $x_u = x_y = x_0$. Da er transferfunksjonen fra u til y passiv siden det er en sum av passive transferfunksjoner hvilket sees av

$$\frac{y}{u}(s) = \frac{\frac{m}{A^2}s}{1 + 2\zeta_u\frac{s}{\omega_u} + \frac{s^2}{\omega_u^2}} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{b\phi_i(x_0)^2 s}{s^2 + 2\zeta_i\omega_i s + \omega_i^2} \quad (5.111)$$

I dette tilfelle vil en strengt passiv regulator, som f.eks. en P-regulator, gi et stabilt system. Legg merke til at med en P-regulator er luftstrømmen ut $u = -K_p y$, og regulatoren gir dermed et effekttap på $K_p y^2$ som demper vibrasjonene.

Derneft antar vi at pådrag og måling ikke er kollokert hvilket vil si at $x_u \neq x_y$. Da er

$$\frac{y}{u}(s) = \frac{\frac{m}{A^2}s}{1 + 2\zeta_u\frac{s}{\omega_u} + \frac{s^2}{\omega_u^2}} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{b\phi_i(x_u)\phi_i(x_y)s}{s^2 + 2\zeta_i\omega_i s + \omega_i^2} \quad (5.112)$$

Denne transferfunksjonen er passiv hvis $\phi_i(x_u)$ har samme fortegn som $\phi_i(x_y)$ for alle i . I motsatt fall vil $\phi_i(x_u)\phi_i(x_y) \leq 0$ for visse i hvilket kan være meget problematisk i regulatordesign. I figur 5.17 er prosessen med regulator vist. Vi ser at hvis $\phi_i(x_u)\phi_i(x_y) \leq 0$, så vil sløyfen med modus i ha positiv tilbakekobling, mens andre sløyfer og spesielt sløyfen for det uniforme trykket har negativ tilbakekobling.

Dette kan illustreres for det uniforme trykket $p_u(t)$ pluss første ledd $p_{d1}(x, t)$ for det romlig varierende trykket. Anta at $x_u = \ell/2$ og at $x_y = -\ell/2$ som gir $\phi_1(x_u)\phi_1(x_y) = -1$. Da er

$$\frac{y}{u}(s) = \frac{\frac{m}{A^2}s}{1 + 2\zeta_u\frac{s}{\omega_u} + \frac{s^2}{\omega_u^2}} - \frac{bs}{s^2 + 2\zeta_1\omega_1 s + \omega_1^2} \quad (5.113)$$

Her er $\omega_1/\omega_u \approx 3$, mens b og m/A^2 er av samme størrelsesorden. Transferfunksjonen fra u til y er altså en sum av to relativt like transferfunksjoner som har motsatt fortegn. For et slikt system vil det i praksis være umulig å kunne oppnå god ytelse uten at systemet blir meget følsomt for modellusikkerhet.

Konklusjonen er at for dette systemet er det av avgjørende betydning at pådrag og måling er kollokert slik at prosessen blir passiv. Stabilitet oppnås i så fall med en strengt passiv regulator.

Herved har vi påvist ved bruk av tilnærmede lineariserte modeller at prosessen med pådrag u og måling y er passiv når pådrag og måling er kollokert. Et interessant spørsmål i denne sammenheng er om passivitet også kan påvises for en større klasse modeller. Dette er mulig ved å bruke energibetraktninger. Vi definerer energifunksjonen V som er summen av kinetisk og potensiell energi for skip og luftpute:

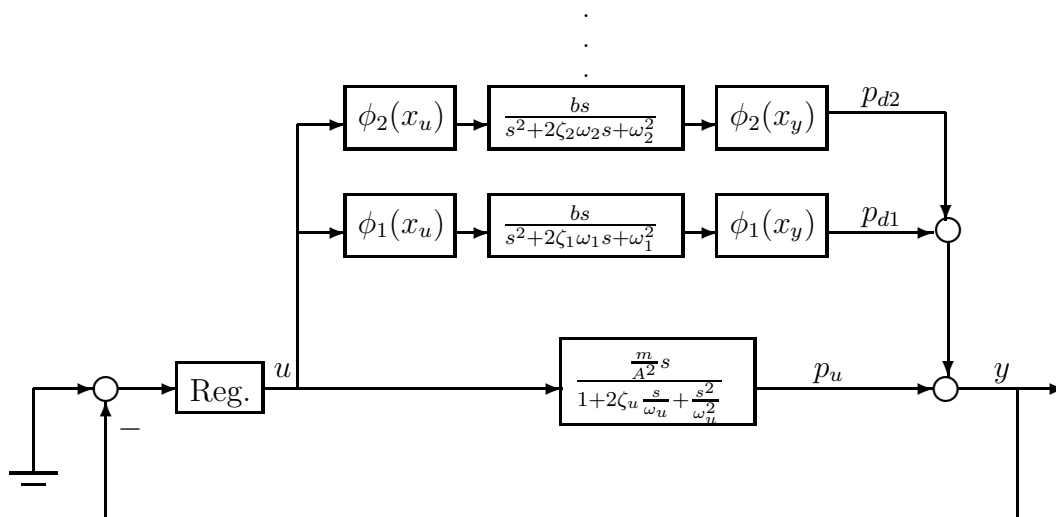
$$V = \text{kinetisk energi} + \text{potensiell energi}$$

Den tidsderiverte av V er da

$$\dot{V} = yu + P_v + P_b - P_t$$

hvor yu er effekt inn på systemet fra pådraget, P_v er effekt fra viften, P_b er effekt fra bølgene, og P_t er effekttap ved lekkasje og friksjon. Her kan tilført energi fra forstyrrelsene

$$\int_0^T [P_v(t) + P_b(t) - P_t(t)] dt$$



Figur 5.17: Trykkregulering for SES

bli vilkårlig stor, og passivitet kan ikke påvises. Antar man imidlertid at superposisjon gjelder, hvilket er tilfelle når systemet er lineært, kan systemet studeres uten fortyrrelsene P_v og P_b , og da er systemet passivt siden $\int_0^T P_t(t)dt \geq 0$. Derfor vil en linearisert modell av systemet med pådrag u og måling y kunne forventes å være passiv.

5.10 Multivariable lineære systemer

Teorem 5.6 Gitt et lineært, tidsinvariant system med transferfunksjonmatrise $\mathbf{H}(s)$ definert ved

$$\mathbf{y}(s) = \mathbf{H}(s)\mathbf{u}(s) \quad (5.114)$$

hvor pådraget $\mathbf{u}(t)$ og målingen $\mathbf{y}(t)$ er m -dimensjonale vektorer. Anta at alle polene til $\mathbf{H}(s)$ ligger i det åpne venstre halvplan. La $\lambda_{\min}[\mathbf{H}(j\omega) + \mathbf{H}^*(j\omega)]$ betegne minste egenverdi av den hermitiske matrisen³ $\mathbf{H}(j\omega) + \mathbf{H}^*(j\omega)$. Da gjelder:

1. Systemet er passivt $\Leftrightarrow \lambda_{\min}[\mathbf{H}(j\omega) + \mathbf{H}^*(j\omega)] \geq 0$ for alle ω .
2. Systemet er strengt passivt \Leftrightarrow Det fins en $\delta > 0$ slik at $\lambda_{\min}[\mathbf{H}(j\omega) + \mathbf{H}^*(j\omega)] \geq \delta > 0$ for alle ω .

Bevis: La $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m \times m}$ være en vilkårlig hermitisk matrise med egenverdier $\lambda_i(\mathbf{A})$ og ortonormale egenvektorer \mathbf{v}_i . La $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^m$ være en vilkårlig vektor med komplekse komponenter. Fra lineær algebra [38] har vi da at $\mathbf{x}^* \mathbf{A} \mathbf{x}$ er reell. Siden egenvektorene \mathbf{v}_i er ortonormale kan \mathbf{x} dekomponeres ved $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^m x_i \mathbf{v}_i$ hvor $x_i = \mathbf{v}_i^* \mathbf{x}$ og $|\mathbf{x}|^2 = \sum_{i=1}^m |x_i|^2$, og ifølge spektralteoremet kan \mathbf{A} dekomponeres ved

$$\mathbf{A} = \sum_{i=1}^m \lambda_i(\mathbf{A}) \mathbf{v}_i \mathbf{v}_i^* \quad (5.115)$$

³En matrise $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m \times m}$ er hermitisk hvis $\mathbf{A} = \mathbf{A}^*$. Her er $\mathbb{C}^{m \times m}$ mengden av alle matriser av dimensjon $m \times m$ med komplekse elementer, mens $(\cdot)^*$ betegner transponering og komplekskonjugering.

Dermed er

$$\mathbf{x}^* \mathbf{A} \mathbf{x} = \sum_{i=1}^m \lambda_i(\mathbf{A}) \mathbf{x}^* \mathbf{v}_i \mathbf{v}_i^* \mathbf{x} = \sum_{i=1}^m \lambda_i(\mathbf{A}) |x_i|^2 \geq \lambda_{\min}(\mathbf{A}) \sum_{i=1}^m |x_i|^2 = \lambda_{\min}(\mathbf{A}) |\mathbf{x}|^2 \quad (5.116)$$

Fra Parsevals teorem har vi

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \mathbf{y}^T(t) \mathbf{u}_T(t) dt &= \sum_{i=1}^m \int_0^\infty y_i(t) (u_i)_T(t) dt \\ &= \sum_{i=1}^m \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty y_i^*(j\omega) (u_i)_T(j\omega) d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \mathbf{y}^*(j\omega) \mathbf{u}_T(j\omega) d\omega \end{aligned} \quad (5.117)$$

Vi kan dermed utføre følgende utregning:

$$\begin{aligned} \int_0^T \mathbf{y}(t)^T \mathbf{u}(t) dt &= \int_0^\infty \mathbf{y}^T(t) \mathbf{u}_T(t) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \mathbf{y}^*(j\omega) \mathbf{u}_T(j\omega) d\omega \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^\infty [\mathbf{u}_T^*(j\omega) \mathbf{y}(j\omega) + \mathbf{y}^*(j\omega) \mathbf{u}_T(j\omega)] d\omega \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^\infty \mathbf{u}_T^*(j\omega) [\mathbf{H}(j\omega) + \mathbf{H}^*(j\omega)] \mathbf{u}_T(j\omega) d\omega \end{aligned} \quad (5.118)$$

Siden $\mathbf{H}(j\omega) + \mathbf{H}^*(j\omega)$ er hermitisk har vi fra (5.116) at

$$\int_0^T \mathbf{y}(t)^T \mathbf{u}(t) dt \geq \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^\infty \lambda_{\min}[\mathbf{H}(j\omega) + \mathbf{H}^*(j\omega)] |\mathbf{u}_T(j\omega)|^2 d\omega \quad (5.119)$$

Resultatet kan dermed vises på tilsvarende måte som i beviset for teorem 5.4. ■

5.11 Dynamisk posisjonering

Ved dynamisk posisjonering av skip er propellkrefter pådraget og man ønsker å styre skipets hastighet og posisjon. I dynamisk posisjonering styres de tre frihetsgradene jag, svai og gir. Jag er hastighet i langskipsretning som betegnes u , svai er hastighet i tverrskipsretning som betegnes v og gir er vinkelhastighet om vertikalaksen som betegnes r . Pådrag er propellkraft X i langskipsretning, propellkraft Y i tverrskipsretning og moment N om vertikalaksen. Vi definerer pådragsvektoren \mathbf{u} og utgangsvektoren \mathbf{y} ved

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ r \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{u} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ N \end{pmatrix} \quad (5.120)$$

Skipet vil ha kinetisk energi som er lik den totale energi $V(t)$ siden skipet ikke har potensiell energi. Effekt inn på skipet fra pådraget er $\mathbf{u}(t)^T \mathbf{y}(t)$. Dermed er

$$\dot{V}(t) = \mathbf{u}(t)^T \mathbf{y}(t) - g(t) \quad (5.121)$$

hvor $g(t)$ er effekttap. Her kan imidlertid ubegrenset med energi bli tilført systemet fra bølgekrefter, og dette betyr at $\int_0^T g(t)dt$ ikke har noen nedre begrensning. Systemet er derfor ikke passivt.

Vi kan imidlertid oppfylle betingelsene for passivitet ved å tilnærme modellen med en modell hvor superposisjon gjelder for propell- og bølgekrefter. Dette er tilfelle hvis vi antar at prosessen er lineær hvilket impliserer at superposisjon gjelder. Vi kan da analysere modellen under antagelsen at bølgekreftene er lik null, og da er $\int_0^T g(t)dt \geq 0$.

Dette betyr at den lineære prosessen

$$\mathbf{y}(s) = \mathbf{H}(s)\mathbf{u}(s) \quad (5.122)$$

som fremkommer ved å linearisere fartøymodellen, er passiv når pådrag er propellkrefter som gitt av \mathbf{u} og måling er hastighetene \mathbf{y} . Dette er ikke noen overraskelse siden den lineariserte modellen har formen

$$\begin{aligned} \dot{u} &= -a_u u + X \\ \dot{v} &= -a_v v + Y \\ \dot{r} &= -a_r r + N \end{aligned}$$

som er en tidskonstant i hver frihetsgrad.

5.12 Spredningsfunksjonen

Ved et variabelskifte oppnås en alternativ beskrivelse av passive systemer hvor passivitet svarer til liten forsterkning. Den intuitive ideen til dette kommer fra lineær kretsteori. Vi betrakter en lineær tidsinvariant enport med spenning e , strøm i og impedans $z(s)$ slik at

$$e(s) = z(s)i(s) \quad (5.123)$$

Denne enporten kan også beskrives med såkalte bølgevariable⁴

$$a = e + i \quad \text{og} \quad b = e - i \quad (5.124)$$

Ved Laplacetransformasjon får vi

$$a(s) = [z(s) + 1]i(s) \quad (5.125)$$

$$b(s) = [z(s) - 1]i(s) \quad (5.126)$$

Dermed er $i(s) = [z(s) + 1]^{-1}a(s)$ og ved å sette inn dette i (5.126) får vi

$$b(s) = g(s)a(s) \quad (5.127)$$

hvor

$$g(s) = \frac{z(s) - 1}{1 + z(s)} \quad (5.128)$$

er enportens spredningsfunksjon. En fysisk begrunnelse for betegnelsene bølgevariable og spredningsfunksjon finner man i beskrivelsen av tapsfrie transmisjonslinjer hvor a kan oppfattes som innfallende bølge og b som reflektert bølge.

⁴Ofte defineres bølgevariable som $a = (1/2)(e + i)$ og $b = (1/2)(e - i)$.

I passive systemer ser man på energiflyten i systemet, og systemet er passivt hvis betingelsen

$$\int_0^T e(t)i(t)dt \geq 0 \quad (5.129)$$

er oppfylt, hvor det er antatt at null energi er lagret initielt i kretsen. Nå er

$$a^2 - b^2 = (e + i)^2 - (e - i)^2 = 4ei \quad (5.130)$$

som impliserer

$$\int_0^T b^2(t)dt = \int_0^T a^2(t)dt - 4 \int_0^T e(t)i(t)dt \quad (5.131)$$

Passivitet impliserer derfor at

$$\int_0^T b^2(t)dt \leq \int_0^T a^2(t)dt \quad (5.132)$$

og man sier (kanskje litt upresist) at energien i den reflekterte bølgen er mindre enn energien i den innfallende bølgen.

Vi skal nå behandle det generelle monovariabelt systemet

$$y(s) = h(s)u(s) \quad (5.133)$$

Vi innfører bølgevariable

$$a = y + u \quad \text{og} \quad b = y - u \quad (5.134)$$

hvor a er innfallende bølge og b er reflektert bølge. Da er spredningsfunksjonen

$$g(s) \triangleq \frac{b}{a}(s) = \frac{y - u}{y + u}(s) = \frac{h(s) - 1}{1 + h(s)} \quad (5.135)$$

Teorem 5.7 Gitt en rasjonal transferfunksjonen $h(s)$ og la spredningsfunksjonen $g(s)$ være gitt av (5.135). Da gjelder:

1. $h(s)$ er passiv $\Leftrightarrow |g(j\omega)| \leq 1$ for alle ω .
2. $h(s)$ er strengt passiv, og det fins en $\gamma < \infty$ slik at $|h(j\omega)| \leq \gamma$ for alle ω

\Updownarrow

Det fins en $\gamma' \in (0, 1)$ slik at $|g(j\omega)|^2 \leq 1 - \gamma'$ for alle ω .

Bevis: Punkt 1 kan vises for $h(s)$ som ikke har poler i $\text{Re}[s] \geq 0$. For $h(s)$ med poler på imaginæraksen er resultatet vist i kapittel 5.19. Vi utfører følgende utregning:

$$\begin{aligned} |g(j\omega)|^2 &= \frac{|h(j\omega) - 1|^2}{|h(j\omega) + 1|^2} \\ &= \frac{|h(j\omega)|^2 - [h(j\omega) + h^*(j\omega)] + 1}{|h(j\omega)|^2 + [h(j\omega) + h^*(j\omega)] + 1} \\ &= \frac{|h(j\omega)|^2 - 2\text{Re}[h(j\omega)] + 1}{|h(j\omega)|^2 + 2\text{Re}[h(j\omega)] + 1} \\ &= 1 - \frac{4\text{Re}[h(j\omega)]}{|h(j\omega)|^2 + 2\text{Re}[h(j\omega)] + 1} \end{aligned} \quad (5.136)$$

$$= 1 - \frac{4\text{Re}[h(j\omega)]}{|h(j\omega) + 1|^2} \quad (5.137)$$

Vi har at $h(s)$ er passiv hvis og bare hvis $\operatorname{Re}[h(j\omega)] \geq 0$ for alle ω . Ekvivalensen i punkt 1 følger dermed.

Punkt 2 vises som følger: Anta at det fins en $\delta > 0$ slik at $\operatorname{Re}[h(j\omega)] \geq \delta$ for alle ω , hvilket vil si at $h(s)$ er strengt passiv, og at det fins en $\gamma < \infty$ slik at $|h(j\omega)| \leq \gamma$ for alle ω . Da er

$$\frac{4\operatorname{Re}[h(j\omega)]}{|h(j\omega) + 1|^2} \geq \frac{4\delta}{(\gamma + 1)^2} \quad (5.138)$$

Vi velger nå γ' slik at $0 < \gamma' < \min[1, 4\delta/(\gamma + 1)^2]$. Da er

$$|g(j\omega)|^2 \leq 1 - \gamma' \quad (5.139)$$

hvor $\gamma' \in (0, 1)$.

Anta så at det fins en $\gamma' \in (0, 1)$ slik at $|g(j\omega)|^2 \leq 1 - \gamma'$ for alle ω . Fra (5.136) har vi da

$$1 - \frac{4\operatorname{Re}[h(j\omega)]}{|h(j\omega)|^2 + 2\operatorname{Re}[h(j\omega)] + 1} = |g(j\omega)|^2 \leq 1 - \gamma' \quad (5.140)$$

som gir

$$\frac{4\operatorname{Re}[h(j\omega)]}{|h(j\omega)|^2 + 2\operatorname{Re}[h(j\omega)] + 1} \geq \gamma' \quad (5.141)$$

↓

$$4\operatorname{Re}[h(j\omega)] \geq \gamma'(|h(j\omega)|^2 + 2\operatorname{Re}[h(j\omega)] + 1) \quad (5.142)$$

↓

$$(4 - 2\gamma')\operatorname{Re}[h(j\omega)] \geq \gamma'(|h(j\omega)|^2 + 1) \quad (5.143)$$

↓

$$\operatorname{Re}[h(j\omega)] \geq \frac{\gamma'}{4 - 2\gamma'}(|h(j\omega)|^2 + 1) \geq \frac{\gamma'}{4 - 2\gamma'} > 0 \quad (5.144)$$

Dermed har vi vist at $h(s)$ er strengt passiv.

Endelig forsterkning vises ved følgende utregning:

$$|g(j\omega)|^2 \leq 1 - \gamma' \quad (5.145)$$

↓

$$|h(j\omega) - 1|^2 \leq (1 - \gamma')|h(j\omega) + 1|^2 \quad (5.146)$$

↓

$$|h(j\omega)|^2 - 2\operatorname{Re}[h(j\omega)] + 1 \leq (1 - \gamma')(|h(j\omega)|^2 + 2\operatorname{Re}[h(j\omega)] + 1) \quad (5.147)$$

↓

$$\gamma'|h(j\omega)|^2 - (4 - 2\gamma')\operatorname{Re}[h(j\omega)] + \gamma' \leq 0 \quad (5.148)$$

↓

$$|h(j\omega)|^2 - 2\frac{2 - \gamma'}{\gamma'}|h(j\omega)| + 1 \leq 0 \quad (5.149)$$

Dette er en ligning av typen

$$x^2 - 2bx + 1 \leq 0$$

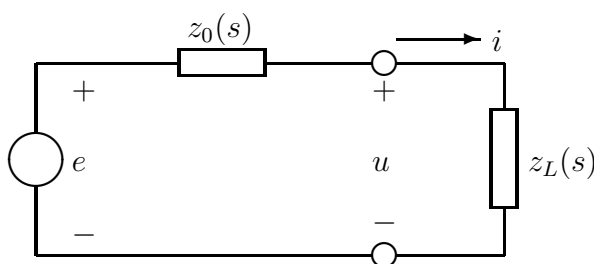
som har løsning $b - \sqrt{b^2 - 1} \leq x \leq b + \sqrt{b^2 - 1}$. Dermed har vi

$$|h(j\omega)| \leq \frac{2 - \gamma'}{\gamma'} + \sqrt{\left(\frac{2 - \gamma'}{\gamma'}\right)^2 - 1} \leq 2\frac{2 - \gamma'}{\gamma'} < \infty \quad (5.150)$$

hvilket vil si at $|h(j\omega)| \leq \gamma$ for alle ω hvor $\gamma = (4 - 2\gamma')/\gamma'$. ■

5.13 Impedanstillpasning

Gitt en elektrisk enport med en spenningskilde med spenning e , strøm i og serieimpedans $z_0(s)$. Denne enporten kobles sammen med en passiv enport med impedans $z_L(s)$ som vist i figur 5.18.



Figur 5.18: Impedanstillpasning

Følgende problemstilling skal behandles: Anta at $z_0(s)$ er gitt, og at $e = E \sin \omega_e t$. Velg $z_L(s)$ slik at effekttapet over z_L maksimaliseres.

Strømmen oppfyller

$$i(s) = \frac{e(s)}{z_0(s) + z_L(s)} \quad (5.151)$$

mens spenningen over z_L er

$$u_L(s) = z_L(s)i(s) \quad (5.152)$$

Effekttapet i z_L er dermed

$$\begin{aligned} P(\omega_e) &= \frac{1}{2} \operatorname{Re}[u_L(j\omega_e)i^*(j\omega_e)] \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{Re}[z_L(j\omega_e)]i(j\omega_e)i^*(j\omega_e) \\ &= \frac{1}{2} \frac{\operatorname{Re}[z_L(j\omega_e)]}{[z_0(j\omega_e) + z_L(j\omega_e)]^* [z_0(j\omega_e) + z_L(j\omega_e)]} E^2 \end{aligned} \quad (5.153)$$

hvor $(\cdot)^*$ betegner komplekskonjugering. Vi setter

$$z_0(j\omega_e) = \alpha + j\beta \quad \text{og} \quad z_L(j\omega_e) = a + jb \quad (5.154)$$

Dette gir

$$P = \frac{1}{2} \frac{aE^2}{(\alpha + a)^2 + (\beta + b)^2} \quad (5.155)$$

Vi vet nå at hvis $a = 0$, så er $P = 0$, mens hvis $a \rightarrow \infty$ eller a er forskjellig fra null og $|b| \rightarrow \infty$, så vil $P \rightarrow 0$. I mellom disse ytterpunktene må det ligge et maksimum, og vi benytter vanlig derivasjon for å finne det. Derivasjon med hensyn på b gir

$$\frac{\partial P}{\partial b} = \frac{E^2}{2} \frac{-2a(\beta + b)}{[(\alpha + a)^2 + (\beta + b)^2]^2} \quad (5.156)$$

og maksimum må dermed forekomme for $b = -\beta$. Derivasjon med hensyn på a gir

$$\frac{\partial P}{\partial a} = \frac{E^2}{2} \frac{\alpha^2 + \beta^2 + 2\beta b + b^2 - a^2}{[(\alpha + a)^2 + (\beta + b)^2]^2} \quad (5.157)$$

Innsetting av $b = -\beta$ gir

$$\frac{\partial P}{\partial a} = \frac{E^2}{2} \frac{\alpha^2 - a^2}{[(\alpha + a)^2 + (\beta + b)^2]^2} \quad (5.158)$$

og det følger at maksimum finnes for $a = \alpha$. Dette betyr at maksimum effekttap i z_L fås med

$$z_L(j\omega_e) = z_0^*(j\omega_e) \quad (5.159)$$

Dette valget for $z_L(j\omega_e)$ kalles impedanstilpassning. For et generelt spekter $z_0(j\omega)$ er det ikke mulig å finne en passiv impedans $z_L(s)$ som oppfyller betingelsen for impedanstilpassning for alle ω siden de to impedansene skal ha samme absoluttverdi, mens fasen har motsatt fortegn.

Vi ser imidlertid at hvis $z_0(j\omega)$ er reell for alle frekvenser oppnås impedanstilpassning ved alle frekvenser ved å velge $z_L = z_0$. I spredningsbeskrivelsen gir impedanstilpassning for reell z_0 et interessant resultat hvis vi definerer bølgevariable som

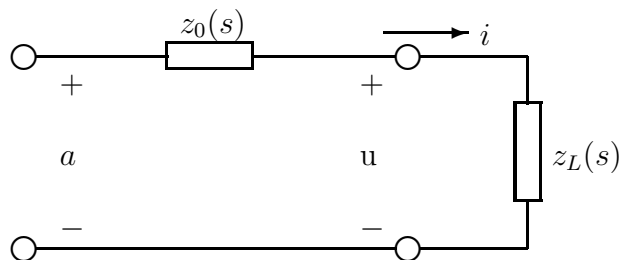
$$a = u + z_0 i \quad \text{og} \quad b = u - z_0 i \quad (5.160)$$

hvor strømmen er skalert med impedansen z_0 . Her ser vi at vi har oppnådd

$$a = e \quad (5.161)$$

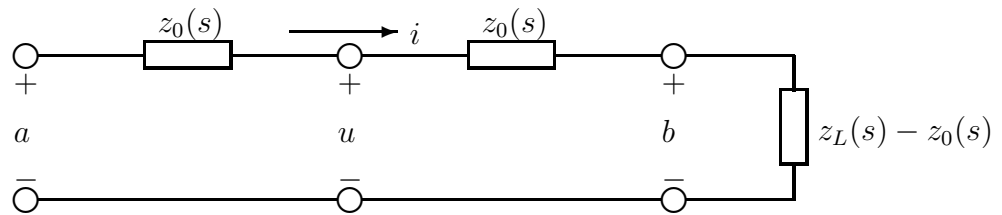
for systemet i figur 5.18.

En fysisk fortolkning av bølgevariabelen a er som følger: La u være inngangsspenning på enporten og i være strømmen inn på enporten. Vi betrakter den utvidede enporten som fremkommer ved å koble enporten i serie med z_0 som vist i figur 5.19. Da er a inngangsspenningen på den utvidede enporten som svarer til u og i . Den fysiske



Figur 5.19: Utvidet enport med bølgevariabelen $a(t)$ som drivende spenning

fortolkningen av b er vist i figur 5.20.

Figur 5.20: Utvidet enport med bølgevariabelene $a(t)$ og $b(t)$

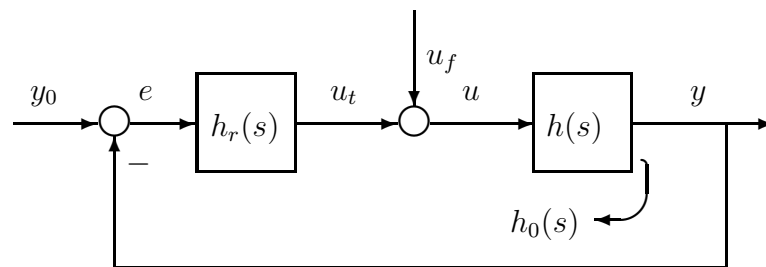
Videre ser vi at hvis $z_L = z_0$, så er

$$u = z_L i = z_0 i \Rightarrow b = 0 \quad (5.162)$$

Det er vanskelig å gi noen klar fysisk fortolkning av dette, men det impliserer at ved impedanstilpasning med reell impedans, så er spredningsfunksjonen

$$g(s) = \frac{b(s)}{a(s)} = 0 \quad (5.163)$$

5.14 Spredningsbeskrivelse av tilbakekoblet passivt system



Figur 5.21: Tilbakekoblet system med foroverkobling

Vi skal se på systemet i figur 5.21 hvor

$$y(s) = h(s)u(s), \quad u_t(s) = h_r(s)e(s) \quad (5.164)$$

$$u(t) = u_f(t) + u_t(t), \quad e(t) = y_0(t) - y(t) \quad (5.165)$$

hvor u_t er pådrag fra tilbakekoblingen, mens u_f er en foroverkobling. Anta at prosessen $h(s)$ er passiv og regulatoren $h_r(s)$ er strengt passiv med endelig forsterkning. Da er som påvist i kapittel 5.6 $\angle|h_0(j\omega)| < 180^\circ$ hvor $h_0(s) \triangleq h(s)h_r(s)$, og systemet er BIBO-stabilt.

Ved et variabelskifte skal nå systemet bringes over på spredningsrepresentasjon. Vi innfører bølgevariable

$$a \triangleq y + u \quad \text{og} \quad b \triangleq y - u$$

for prosessen og

$$a_r \triangleq u_t + e \quad \text{og} \quad b_r \triangleq u_t - e$$

for regulatoren. Videre defineres inngangsvariable

$$a_0 \triangleq y_0 + u_f \quad \text{og} \quad b_0 \triangleq y_0 - u_f$$

Vi finner at

$$a_r = u_t + y_0 - y = u - u_f + y_0 - y = b_0 - b \quad (5.166)$$

og

$$b_r = u_t - y_0 + y = u - u_f - y_0 + y = a - a_0 \quad (5.167)$$

De assosierte spredningsfunksjonene er

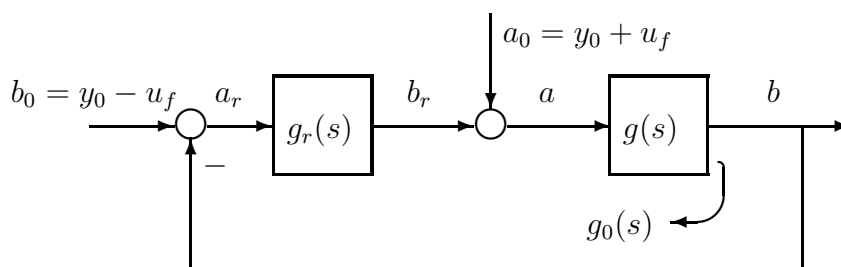
$$g(s) \triangleq \frac{h(s) - 1}{1 + h(s)} \quad \text{og} \quad g_r(s) \triangleq \frac{h_r(s) - 1}{1 + h_r(s)}$$

Siden $h(s)$ og $h_r(s)$ er passive kan ikke $g(s)$ og $g_r(s)$ ha poler i det åpne høyre halvplan. Dette følger siden $h(s)$ er passiv og dermed ikke har poler i høyre halvplan, mens $1 + h(s)$ er den karakteristiske ligning som svarer til $h(s)$ med en enhets tilbakekobling, som åpenbart gir et stabilt system. Tilsvarende resultat gjelder for $h_r(s)$.

Systemet kan da beskrives som vist i figur 5.22 hvor

$$b(s) = g(s)a(s), \quad b_r(s) = g_r(s)a_r(s) \quad (5.168)$$

$$a(t) = b_r(t) + a_0(t), \quad a_r(t) = b_0(t) - b(t) \quad (5.169)$$



Figur 5.22: Spredningsrepresentasjon av tilbakekoblet system med foroverkobling

Med passivitetsbeskrivelsen var det lett å påvise stabilitet for systemet ut fra begrensningen på fase til $h_0(j\omega)$. Det er nå interessant å spørre om en like enkel betraktning kan brukes i forbindelse med spredningsbeskrivelsen. Dette viser seg å være tilfelle.

Vi innfører sløyfetransferfunksjonen

$$g_0(s) \triangleq g(s)g_r(s) \quad (5.170)$$

$g_0(s)$ kan ikke ha poler i det åpne høyre halvplan siden $g(s)$ og $g_r(s)$ ikke har poler i det åpne høyre halvplan. Nå har vi fra teorem 5.7 at

1. $|g(j\omega)| \leq 1$ for alle ω siden $h(s)$ er passiv.
2. $|g_r(j\omega)| < 1$ for alle ω siden $h_r(s)$ er strengt passiv med endelig forsterkning.

Dermed er

$$|g_0(j\omega)| < 1 \quad \text{for alle } \omega \quad (5.171)$$

Ifølge Nyquists kriterium er systemet asymptotisk stabilt. Siden systemet er lineært, er det også BIBO-stabilt.

5.15 Spredningsmatrisen for en toport

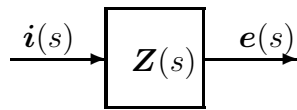
Hittil har vi behandlet monovariabelt systemer som har samme struktur som en elektrisk enport. Resultatene kan generaliseres til n -porter, og vi skal her se på elektriske toporter. Vi definerer et system

$$\mathbf{e}(s) = \mathbf{Z}(s)\mathbf{i}(s) \quad (5.172)$$

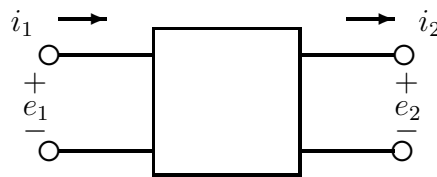
som vist i figur 5.23 med

$$\mathbf{i} = \begin{pmatrix} i_1 \\ -i_2 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{e} = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} \quad (5.173)$$

hvor i_1 er strøm inn på terminal 1, i_2 er strøm ut fra terminal 2 og \mathbf{e} er spenning over terminalene som vist i figur 5.24. Da er $\mathbf{e}^T \mathbf{i}$ effekt inn på systemet, og hvis toporten



Figur 5.23: Passiv toport representert ved transferfunksjonsmatrise på impedansform



Figur 5.24: Kretsdiagram for passiv elektrisk toport

består av passive elektriske komponenter som spoler, kondensatorer og motstander, så er impedansmatrisen $\mathbf{Z}(s)$ passiv, og det fins en β slik at $\int_0^T \mathbf{e}(t)^T \mathbf{i}(t) dt \geq \beta$. Hvis det ikke er lagret initiell energi i systemet, så er $\beta = 0$.

Vi definerer vektorene

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \mathbf{e} + \mathbf{i} \quad \text{og} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \mathbf{e} - \mathbf{i} \quad (5.174)$$

hvilket gir

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1 + i_1 \\ e_2 - i_2 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1 - i_1 \\ e_2 + i_2 \end{pmatrix} \quad (5.175)$$

Tilsvarende det monovariabelt tilfelle er $\mathbf{a}(s) = [\mathbf{Z}(s) + \mathbf{I}]\mathbf{i}(s)$, og dermed er $\mathbf{i}(s) = [\mathbf{Z}(s) + \mathbf{I}]^{-1}\mathbf{a}(s)$. Innsetting av dette uttrykket for \mathbf{i} i

$$\mathbf{b}(s) = [\mathbf{Z}(s) - \mathbf{I}]\mathbf{i}(s)$$

gir

$$\mathbf{b}(s) = \mathbf{S}(s)\mathbf{a}(s) \quad (5.176)$$

hvor spredningsmatrisen $\mathbf{S}(s)$ er gitt av

$$\mathbf{S}(s) = [\mathbf{Z}(s) - \mathbf{I}][\mathbf{Z}(s) + \mathbf{I}]^{-1} \quad (5.177)$$

Påstand 5.4 Systemet gitt ved (5.172) og (5.173) er passivt hvis og bare hvis

$$\mathbf{I} - \mathbf{S}^*(j\omega)\mathbf{S}(j\omega) \geq 0 \quad \text{for alle } \omega \quad (5.178)$$

Bevis: Hvis \mathbf{S} som gitt av (5.177) oppfyller (5.178), så er \mathbf{S} begrenset reell. Dette er behandlet i kapittel 5.19, hvor det er vist at et lineært, tidsinvariant system er passivt hvis og bare hvis spredningsmatrisen er begrenset reell. ■

5.16 Seriekobling av toportere

Gitt de to passive elektriske toportene i figur 5.25 hvor

$$\mathbf{e}^1(s) = \mathbf{Z}_1(s)\mathbf{i}^1(s) \quad (5.179)$$

$$\mathbf{e}^2(s) = \mathbf{Z}_2(s)\mathbf{i}^2(s) \quad (5.180)$$

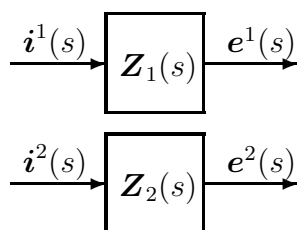
hvor

$$\mathbf{e}^k = \begin{pmatrix} e_1^k \\ e_2^k \end{pmatrix} \quad (5.181)$$

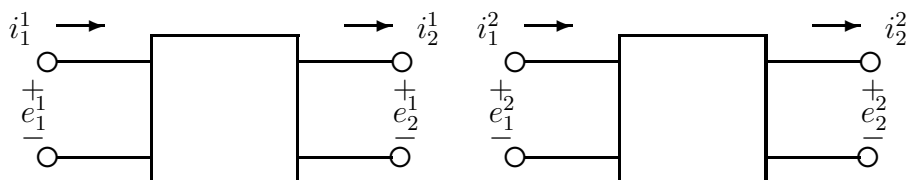
er spenning over henholdsvis terminal 1 og 2 for toport i , og

$$\mathbf{i}^k = \begin{pmatrix} i_1^k \\ -i_2^k \end{pmatrix} \quad (5.182)$$

hvor i_1^k er strøm inn på terminal 1 for toport k , og i_2^k er strøm ut fra terminal 2 for toport k som vist i figur 5.26. Effekt inn på toport k er dermed $(\mathbf{e}^k)^T \mathbf{i}^k$, og det følger at $\mathbf{Z}_1(s)$ og $\mathbf{Z}_2(s)$ er passive transferfunksjonsmatriser.



Figur 5.25: *Passive toportere representert ved transferfunksjonsmatriser på impedansform*



Figur 5.26: *Kretsdigram for passive toportere*

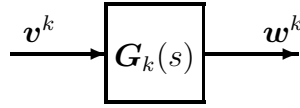
En alternativ beskrivelse er en hybrid representasjon med

$$\mathbf{v}^k = \begin{pmatrix} i_1^k \\ e_2^k \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{w}^k = \begin{pmatrix} e_1^k \\ -i_2^k \end{pmatrix} \quad (5.183)$$

og den hybride transferfunksjonsmatrisen $\mathbf{G}_k(s)$ som defineres ved

$$\mathbf{w}^k(s) = \mathbf{G}_k(s)\mathbf{v}^k(s) \quad (5.184)$$

Systemet er vist i figur 5.27. Også i dette tilfelle er skalarproduktet $(\mathbf{v}^k)^T \mathbf{w}^k$ mellom inngang og utgang lik effekten inn på toport k , og det følger at $\mathbf{G}_1(s)$ og $\mathbf{G}_2(s)$ er passive.



Figur 5.27: Passiv toport representert ved transferfunksjonsmatrise på hybrid form

Bølgevariable defineres ved

$$\mathbf{a}^k = \mathbf{e}^k + \mathbf{i}^k = \begin{pmatrix} e_1^k + i_1^k \\ e_2^k - i_2^k \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{b}^k = \mathbf{e}^k - \mathbf{i}^k = \begin{pmatrix} e_1^k - i_1^k \\ e_2^k + i_2^k \end{pmatrix} \quad (5.185)$$

hvor fortegnet på i_2^k skyldes at denne strømmen er definert å ha retning ut fra terminal 2. Spredningsmatriser $\mathbf{S}_k(s)$ defineres ved

$$\mathbf{b}^k(s) = \mathbf{S}_k(s)\mathbf{a}^k(s) \quad (5.186)$$

Her er som tidligere utledet

$$\mathbf{S}_k(s) = [\mathbf{Z}_k(s) - \mathbf{I}][\mathbf{Z}_k(s) + \mathbf{I}]^{-1} \quad (5.187)$$

Spredningsmatrisen kan også uttrykkes med den hybride representasjonen ved å bruke sammenhengene

$$\mathbf{a}^k = (\mathbf{w}^k + \mathbf{v}^k) \quad (5.188)$$

$$\mathbf{b}^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} (\mathbf{w}^k - \mathbf{v}^k) \quad (5.189)$$

Dette gir

$$\mathbf{S}_k(s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} [\mathbf{G}_k(s) - \mathbf{I}][\mathbf{G}_k(s) + \mathbf{I}]^{-1} \quad (5.190)$$

Toportene er koblet i serie ved at

$$e_2^1 = e_1^2 \quad \text{og} \quad i_2^1 = i_1^2 \quad (5.191)$$

Ved bruk av bølgevariable er seriekoblingen gitt av

$$b_2^1 = a_1^2 \quad \text{og} \quad a_2^1 = b_1^2 \quad (5.192)$$

siden

$$b_2^1 = e_2^1 + i_2^1 = e_1^2 + i_1^2 = a_1^2 \quad (5.193)$$

og

$$a_2^1 = e_2^1 - i_2^1 = e_1^2 - i_1^2 = b_1^2 \quad (5.194)$$

I begge tilfellene (5.191) og (5.192) er seriekoblingen gitt ved betingelser både på inngang og utgang av toporten.

For beskrivelse av seriekoblinger av toporter kan det være hensiktsmessig å velge en kaskaderepresentasjon hvor inngangsvektoren er strøm og spenning på inngangsterminalen og utgangsvektor er strøm og spenning på utgangsterminalen. Det er da enkelt å beskrive seriekobling. La

$$\mathbf{y}^k(s) = \mathbf{H}_k(s)\mathbf{u}^k(s) \quad (5.195)$$

hvor

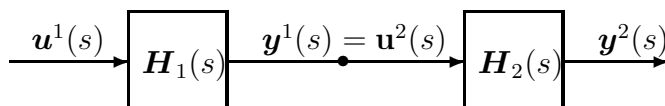
$$\mathbf{u}^k = \begin{pmatrix} e_1^k \\ i_1^k \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{y}^k = \begin{pmatrix} e_2^k \\ i_2^k \end{pmatrix} \quad (5.196)$$

Legg merke til at \mathbf{H}_k ikke er passiv siden effekten inn på systemet ikke er gitt som skalarproduktet mellom \mathbf{u}^k og \mathbf{y}^k . I dette tilfelle er seriekoblingen gitt ved

$$\mathbf{y}^1 = \mathbf{u}^2 \quad (5.197)$$

og vi har dermed som vist i figur 5.28

$$\mathbf{y}^2(s) = \mathbf{H}_2(s)\mathbf{y}^1 = \mathbf{H}_2(s)\mathbf{H}_1(s)\mathbf{u}^1(s) \quad (5.198)$$

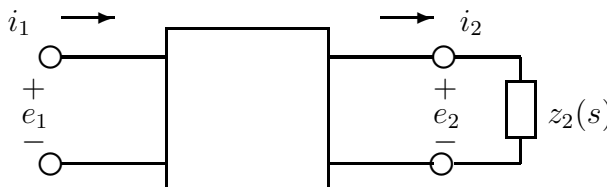


Figur 5.28: Passive toporter representert ved transferfunksjonsmatriser på kaskadeform

Gitt en toport

$$\begin{pmatrix} e_2(s) \\ i_2(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_{11}(s) & h_{12}(s) \\ h_{21}(s) & h_{22}(s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1(s) \\ i_1(s) \end{pmatrix} \quad (5.199)$$

Anta at utgangsterminalen seriekobles med en enport med impedans $z_2(s)$ slik at $e_2(s) = z_2(s)i_2(s)$ som vist i figur 5.29.



Figur 5.29: Passiv enport bestående av passiv toport seriekoblet med passiv enport

Da er

$$z_2(s)i_2(s) = h_{11}(s)e_1(s) + h_{12}(s)i_1(s) \quad (5.200)$$

$$i_2(s) = h_{21}(s)e_1(s) + h_{22}(s)i_1(s) \quad (5.201)$$

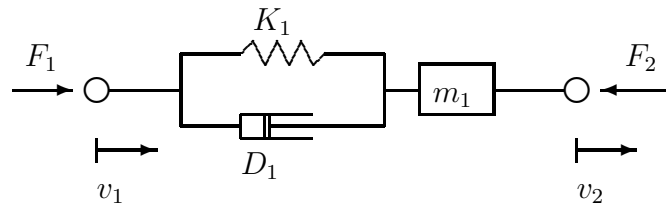
hvilket gir

$$h_{11}(s)e_1(s) + h_{12}(s)i_1(s) = z_2(s)h_{21}(s)e_1(s) + z_2(s)h_{22}(s)i_1(s) \quad (5.202)$$

og dermed fremkommer følgende enportbeskrivelse av toporten i serie med enporten:

$$\frac{e_1}{i_1}(s) = \frac{z_2(s)h_{22}(s) - h_{12}(s)}{h_{11}(s) - z_2(s)h_{21}(s)} \quad (5.203)$$

5.17 Toportbeskrivelse av passive mekaniske systemer



Figur 5.30: Mekanisk toport bestående av masse, fjær og demper

Vi betrakter systemet i figur 5.30. En masse m_1 er forbundet med en parallellkobling av en fjær med fjærkonstant K_1 og en demper med dempekoeffisient D_1 . En kraft F_1 virker på parallellkoblingen av fjæren og demperen, og hastigheten i kraftens angrepspunkt er v_1 , mens posisjonen er x_1 . Massen har hastighet v_2 og posisjon x_2 , og påvirkes av en kraft F_2 i tillegg til fjær- og demperkraften. Bevegelsesligningen for massen er gitt av Newtons lov:

$$m_1 \ddot{x}_2 = F_1 - F_2 \quad (5.204)$$

hvor fjær- og demperkraften er

$$F_1 = K_1(x_1 - x_2) + D_1(v_1 - v_2) \quad (5.205)$$

Laplacetransformasjon gir

$$m_1 s v_2(s) = F_1(s) - F_2(s) \quad (5.206)$$

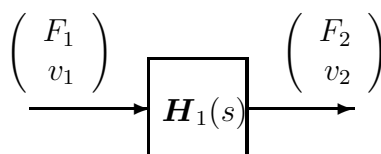
og

$$F_1(s) = \frac{K_1 + D_1 s}{s} [v_1(s) - v_2(s)] \quad (5.207)$$

siden $s x_1(s) = v_1(s)$ og $s x_2(s) = v_2(s)$. Ved å løse ut $F_2(s)$ og $v_2(s)$ fra disse ligningene finnes kaskadebeskrivelsen

$$\begin{pmatrix} F_2(s) \\ v_2(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{m_1 s^2 + D_1 s + K_1}{D_1 s + K_1} & -m_1 s \\ -\frac{s}{D_1 s + K_1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_1(s) \\ v_1(s) \end{pmatrix} \quad (5.208)$$

Blokkdiagram er vist i figur 5.31



Figur 5.31: Blokkdiagram for mekanisk toport bestående av masse, fjær og demper på kaskadeform

Legg merke til at i denne beskrivelsen er inngang $(F_1, v_1)^T$, mens utgang er (F_2, v_2) . Dermed har ikke skalarproduktet mellom inngang og utgang noen fysisk mening, hvilket

medfører at selv om det mekaniske systemet består av passive mekaniske komponenter, så følger det ikke at transferfunksjonsmatrisen

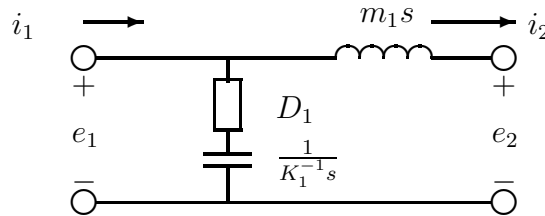
$$\mathbf{H}_1(s) = \begin{pmatrix} h_{11}(s) & h_{12}(s) \\ h_{21}(s) & h_{22}(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{m_1 s^2 + D_1 s + K_1}{D_1 s + K_1} & -m_1 s \\ -\frac{s}{D_1 s + K_1} & 1 \end{pmatrix} \quad (5.209)$$

er passiv. Derimot vil en impedansbeskrivelse med pådrag $\mathbf{F} = (F_1, F_2)^T$ og måling $\mathbf{v} = (v_1, -v_2)^T$ gi et system $\mathbf{F}(s) = \mathbf{Z}_1(s)\mathbf{v}(s)$ hvor $\mathbf{Z}_1(s)$ er passiv. Det samme er tilfelle med f.eks. en hybrid beskrivelse med pådrag $\mathbf{u} = (F_1, -v_2)^T$ og måling $\mathbf{y} = (v_1, F_2)^T$ som gir et system $\mathbf{y}(s) = \mathbf{G}_1(s)\mathbf{u}(s)$ hvor $\mathbf{G}_1(s)$ er passiv.

Videre er det verdt å legge merke til at den mekaniske toporten gitt av (5.208) har en elektrisk ekvivalent i toporten i figur 5.32 hvor

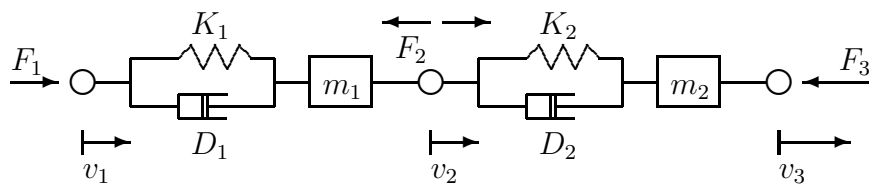
$$\begin{pmatrix} e_2(s) \\ i_2(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{m_1 s^2 + D_1 s + K_1}{D_1 s + K_1} & -m_1 s \\ -\frac{s}{D_1 s + K_1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1(s) \\ i_1(s) \end{pmatrix} \quad (5.210)$$

hvor m_1 er induktans, D_1 er resistans og K_1^{-1} er kapasitans.



Figur 5.32: Elektrisk ekvivalent for mekanisk toport med masse, fjær og demper

Eksempel 5.8 Vi skal i dette eksempelet se på en seriekobling av toporten gitt av (5.208) med en tilsvarende mekanisk toport som har en masse m_2 , dempekoeffisient D_2 og fjærkonstant K_2 . Denne toporten er vist i figur 5.33 og beskrives av



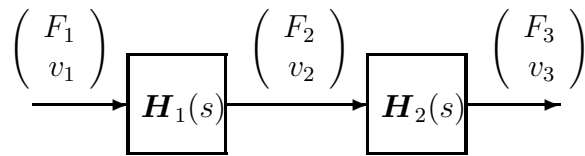
Figur 5.33: Seriekobling av to mekaniske toporter

$$\begin{pmatrix} F_3(s) \\ v_3(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{m_2 s^2 + D_2 s + K_2}{D_2 s + K_2} & -m_2 s \\ -\frac{s}{D_2 s + K_2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_2(s) \\ v_2(s) \end{pmatrix} \quad (5.211)$$

og vi definerer transferfunksjonsmatrisen

$$\mathbf{H}_2(s) = \begin{pmatrix} \frac{m_2 s^2 + D_2 s + K_2}{D_2 s + K_2} & -m_2 s \\ -\frac{s}{D_2 s + K_2} & 1 \end{pmatrix} \quad (5.212)$$

Toporten som oppstår ved seriekoblingen er vist i figur 5.34 og er gitt av

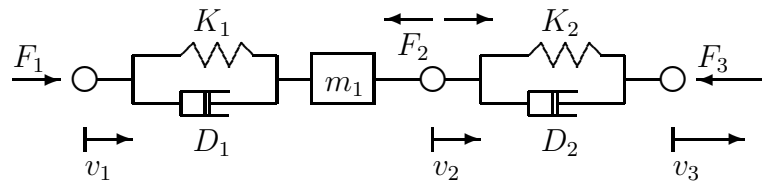


Figur 5.34: Blokkdiagram på kaskadeform av seriekobling av to mekaniske toporter

$$\begin{pmatrix} F_3(s) \\ v_3(s) \end{pmatrix} = \mathbf{H}_2(s) \begin{pmatrix} F_2(s) \\ v_2(s) \end{pmatrix} = \mathbf{H}_2(s)\mathbf{H}_1(s) \begin{pmatrix} F_1(s) \\ v_1(s) \end{pmatrix} \quad (5.213)$$

hvor $\mathbf{H}_1(s)$ er gitt av (5.209). Det er nå i prinsippet enkelt å regne ut analytiske uttrykk for elementene i transferfunksjonsmatrisen $\mathbf{H} \triangleq \mathbf{H}_2(s)\mathbf{H}_1(s)$, men dette vil vanligvis ikke være interessant å gjøre siden uttrykkene er så store at det ikke nødvendigvis har noen hensikt å kjenne dem. Det kan være mer interessant å beregne $\mathbf{H}(j\omega)$ numerisk for plotting av frekvensresponser. ■

Eksempel 5.9 Vi skal i dette eksempelet se på en seriekobling av toporten gitt av (5.208) med en tilsvarende mekanisk toport bestående av en parallellkobling av en demper med dempekoeffisient D_2 og en fjær med fjærkonstant K_2 . Systemet er vist i figur 5.35



Figur 5.35: Seriekobling av mekaniske toporter

Denne toporten beskrives da av

$$\begin{pmatrix} F_3(s) \\ v_3(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{s}{D_2s+K_2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_2(s) \\ v_2(s) \end{pmatrix} \quad (5.214)$$

Toporten som oppstår ved seriekoblingen finnes ved å multiplisere transferfunksjonsmatrisen i (5.211) med transferfunksjonsmatrisen i (5.209), hvilket gir

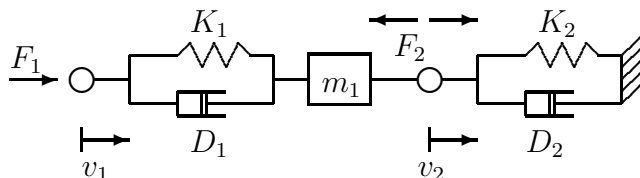
$$\begin{pmatrix} F_3(s) \\ v_3(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{m_1s^2+D_1s+K_1}{D_1s+K_1} & -m_1s \\ -\frac{s[m_1s^2+(D_1+D_2)s+K_1+K_2]}{(D_1s+K_1)(D_2s+K_2)} & \frac{m_1s^2}{D_2s+K_2} + 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_1(s) \\ v_1(s) \end{pmatrix} \quad (5.215)$$

Eksempel 5.10 Anta at massen m_1 er forbundet til et fast punkt med en fjær K_2 i parallell med en demper D_2 . Systemet er vist i figur 5.36. Her er

$$F_2(s) = K_2x_2(s) + D_2v_2(s) = z_2(s)v_2(s) \quad (5.216)$$

hvor

$$z_2(s) = \frac{K_2 + D_2s}{s} = K_2 \frac{1 + \frac{D_2}{K_2}s}{s} \quad (5.217)$$



Figur 5.36: Seriekobling av mekanisk toport med en enport

Innsatt i (5.209) gir dette $h_{11}F_1 + h_{12}v_1 = z_2(h_{21}F_1 + h_{22}v_1)$. Dermed fremkommer transferfunksjonen

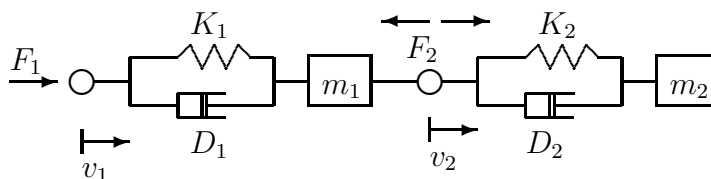
$$\frac{F_1}{v_1}(s) = \frac{z_2(s)h_{22}(s) - h_{12}(s)}{h_{11}(s) - z_2(s)h_{21}(s)} \quad (5.218)$$

Etter litt regning finner man at

$$\frac{F_1}{v_1}(s) = \frac{K_1 + D_1s}{s} \frac{K_2}{K_1 + K_2} \frac{(1 + \frac{D_2}{K_2}s + \frac{m_1}{K_2}s^2)}{(1 + \frac{D_1+D_2}{K_1+K_2}s + \frac{m_1}{K_1+K_2}s^2)} \quad (5.219)$$

■

Eksempel 5.11 Anta så at m_1 er forbundet med en fjær K_2 i parallell med en demper D_2 til en masse m_2 med hastighet v_3 og posisjon x_3 . Systemet er vist i figur 5.37. Da



Figur 5.37: Seriekobling av mekaniske toporter

er

$$m_2\ddot{x}_3 = F_2 \quad (5.220)$$

og

$$F_2 = K_2(x_2 - x_3) + D_2(v_2 - v_3) \quad (5.221)$$

hvilket gir $F_2(s) = m_2s^2x_3(s)$ og

$$[1 + \frac{D_2}{m_2s} + \frac{K_2}{m_2s^2}]F_2(s) = K_2x_2(s) + D_2v_2(s) \quad (5.222)$$

som gir

$$F_2(s) = z_2(s)v_2(s) \quad (5.223)$$

med

$$z_2(s) = \frac{m_2s(K_2 + D_2s)}{K_2 + D_2s + m_2s^2} \quad (5.224)$$

Fra (5.218) finner vi transferfunksjonen

$$\frac{F_1}{v_1}(s) = \frac{\frac{m_2s(K_2+D_2s)}{K_2+D_2s+m_2s^2} + m_1s}{\frac{m_1s^2+D_1s+K_1}{D_1s+K_1} + \frac{m_2s(K_2+D_2s)}{K_2+D_2s+m_2s^2} \frac{s}{D_1s+K_1}} \quad (5.225)$$

som etter en del regning kan skrives på formen

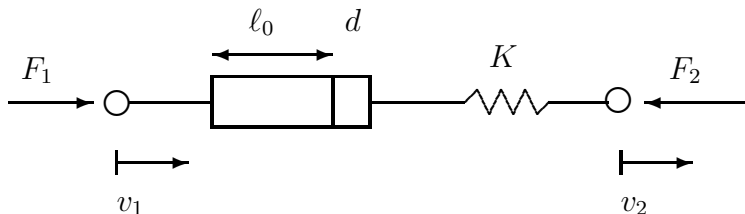
$$\frac{F_1}{v_1}(s) = (D_1s + K_1)s \frac{\frac{m_1+m_2}{K_1} \left(\frac{m_1m_2}{K_2(m_1+m_2)} s^2 + \frac{D_2}{K_2} s + 1 \right)}{m_2s^2(D_2s + K_2) + \left(\frac{m_1}{K_1}s^2 + \frac{D_1}{K_1}s + 1 \right) \left(\frac{m_2}{K_2}s^2 + \frac{D_2}{K_2}s + 1 \right)} \quad (5.226)$$

■

5.18 Aktiv stav for vibrasjonsdemping

5.18.1 Dynamisk modell

I dette eksempelet skal vi utvikle en dynamisk modell for en piezoelektrisk aktuator for bruk i en aktiv stav for vibrasjonsdemping i mekaniske konstruksjoner. En piezoelektrisk aktuator gir en forlengelse som er proporsjonal med pådraget u som er styrespenningen inn på aktuatoren. Den piezoelektriske aktuatoren er montert i en stav som er elastisk i lengderetningen med en fjærkonstant K . Lengden av aktuatoren er $\ell = \ell_0 + d$ hvor $d = K_a u$ er lineær forlengelse av aktuatoren og K_a er proporsjonalkonstanten fra u til d . Posisjonen av stavens endepunkter er henholdsvis x_1 og x_2 , mens kreftene som virker er henholdsvis F_1 og F_2 . Vi definerer videre hastighetene $v_1 = \dot{x}_1$ og $v_2 = \dot{x}_2$. Måling er $y = F_1$. Dette er vist i figur 5.38.



Figur 5.38: Aktiv stav med piezoelektrisk sensor og aktuator

Staven antas å være masseløs idet man antar at massen av aktuatoren og den aktive staven er mye mindre enn andre karakteristiske masser i systemet. Da er

$$y = F_1 = F_2 \quad (5.227)$$

Videre er

$$F_1(s) = K(x_1(s) + d(s) - x_2(s)) = \frac{K}{s}(v_1(s) - v_2(s)) + Kd(s) \quad (5.228)$$

Toportbeskrivelsen på impedansform er

$$\begin{pmatrix} F_1(s) \\ F_2(s) \end{pmatrix} = \frac{K}{s} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1(s) \\ -v_2(s) \end{pmatrix} + K \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} d(s) \quad (5.229)$$

Vi definerer

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ -v_2 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (5.230)$$

skriver systemet på formen

$$\mathbf{F}(s) = \frac{K}{s} \mathbf{Q} \mathbf{v}(s) + K \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} d(s) \quad (5.231)$$

Regulatoren

$$d(s) = -h_r(s)y(s) \quad (5.232)$$

benyttes. Siden $y = F_1 = F_2$ kan vi skrive

$$\mathbf{F}(s) = \frac{K}{s} \mathbf{Q} \mathbf{v}(s) - K h_r(s) \mathbf{F}(s) \quad (5.233)$$

↓

$$[1 + K h_r(s)] \mathbf{F}(s) = \frac{K}{s} \mathbf{Q} \mathbf{v}(s) \quad (5.234)$$

↓

$$\mathbf{F}(s) = \mathbf{Z}(s) \mathbf{v}(s) \quad (5.235)$$

Her er $\mathbf{Z}(s)$ den aktive stavens impedansmatrise definert ved

$$\mathbf{Z}(s) \triangleq z(s) \mathbf{Q} \quad \text{og} \quad z(s) \triangleq \frac{K}{s[1 + K h_r(s)]} \quad (5.236)$$

5.18.2 Passivitetsanalyse

Vi kan nå vise følgende resultat: Den aktive staven med regulatoren (5.232) er passiv hvis og bare hvis $z(s)$ er passiv.

Dette vises som følger: Vi finner at

$$\mathbf{Z}(j\omega) + \mathbf{Z}^*(j\omega) = [z(j\omega) + z(-j\omega)] \mathbf{Q} = 2\text{Re}[z(j\omega)] \mathbf{Q} \quad (5.237)$$

Videre er egenverdiene til \mathbf{Q} lik $\lambda_1(\mathbf{Q}) = 2$ og $\lambda_2(\mathbf{Q}) = 0$. Generelt har man for en matrise $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ og en skalar $\alpha \in \mathbb{R}$ at hvis $\lambda_i(\mathbf{A})$, $i \in \{1 \dots n\}$ er egenverdiene til \mathbf{A} , så er $\lambda_i(\alpha \mathbf{A}) = \alpha \lambda_i(\mathbf{A})$ egenverdiene til $\alpha \mathbf{A}$. Det følger derav at egenverdiene til den hermitiske matrisen $\mathbf{Z}(j\omega) + \mathbf{Z}^*(j\omega)$ er

$$\begin{aligned} \lambda_1[\mathbf{Z}(j\omega) + \mathbf{Z}^*(j\omega)] &= 4\text{Re}[z(j\omega)] \\ \lambda_2[\mathbf{Z}(j\omega) + \mathbf{Z}^*(j\omega)] &= 0 \end{aligned}$$

Vi har dermed

$$\mathbf{Z}(s) \text{ er passiv} \Leftrightarrow \lambda_i[\mathbf{Z}(j\omega) + \mathbf{Z}^*(j\omega)] \geq 0 \Leftrightarrow \text{Re}[z(j\omega)] \geq 0 \Leftrightarrow z(s) \text{ er passiv}$$

Vi skal nå se på to regulatorer for den aktive staven.

1. Den første er en integralregulator. Motivasjonen for å velge denne regulatoren er at den resulterer i at kraft og hastighet over aktuatoren er i fase men med motsatt fortegn. Dette gir effektutlading. Videre gir en integralregulator høy forsterkning ved lave frekvenser og fallende forsterkning med økende frekvens, hvilket er gunstig. Regulatoren er:

$$h_r(s) = \frac{K_p}{s} \quad \Rightarrow \quad z(s) = \frac{K}{s + K K_p} \quad (5.238)$$

Figur 5.39: Fagverkskonstruksjon og prinsippsskisse for aktiv vibrasjonsdemping med aktiv stav med piezoelektrisk aktuator og kraftmåling.

hvor $K_p > 0$. Dette resulterer i passivitet siden

$$\operatorname{Re}[z(j\omega)] = \frac{K^2 K_p}{\omega^2 + (K K_p)^2}$$

2. Den andre regulatoren er meget spesiell siden det er en begrenset derivatregulator som gir positiv tilbakekobling. Ideen med denne regulatoren er som med integralregulatoren at derivatvirkningen med negativt fortegn skal føre til effektutlading ved at kraft og hastighet over aktuatoren er i fase men med motsatt fortegn. Dette er imidlertid en uheldig løsning siden forsterkningen øker med frekvensen, og et lavpassfilter benyttes for å unngå problemer med støy (og som vi skal se for å oppnå stabilitet). Regulatoren er:

$$h_r(s) = -\frac{K_p s}{1 + T s} \Rightarrow z(s) = \frac{K(1 + T s)}{s[1 + (T - K K_p) s]} \quad (5.239)$$

Her har $z(s)$ poler i $s_{p1} = 0$ og $s_{p2} = -1/(T - K K_p)$ og et nullpunkt i $s_n = -1/T$. Realdelen til $z(s)$ finnes å være

$$\operatorname{Re}[z(j\omega)] = \frac{K^2 K_p}{1 + \omega^2 (T - K K_p)^2}$$

Vi ser at $\operatorname{Re}[z(j\omega)] \geq 0$ for alle $K_p \geq 0$, Videre er $z(s)$ en stabil transferfunksjon hvis $K K_p < T$. Dette betyr at $z(s)$ er passiv for alle $K_p \in [0, \frac{T}{K})$.

Til slutt tar vi med at en vilkårlig impedans $z(s) = z_0(s)$ kan oppnås hvis

$$h_r(s) = \frac{1}{s z_0(s)} - \frac{1}{K} \quad (5.240)$$

som gir

$$z_0(s) = \frac{K}{s[1 + Kh_r(s)]} \quad (5.241)$$

5.18.3 Vibrasjonsdemping

Figur 5.40: *Kraftmåling i den ene aktive staven med og uten demping etter eksitasjon ved kraftstøt mot fagverket.*

En aktiv stav som beskrevet i det foregående er blitt brukt til vibrasjonsdemping i laboratorieforsøk⁵. Et fagverk med høyde 2.1 m ble bygd av 3 mm sveisetråd. Fagverkets totale vekt er 2 kg. Konstruksjonen er basert på beregninger ved bruk av elementmetoden hvor programsystemet FEDEM [33] ble brukt. De første mekaniske resonansfrekvensene var ved 14.5 Hz, 14.6 Hz, 50.3 Hz, 68.6 Hz og 70.0 Hz. To av stavene i fagverket ble fjernet og erstattet av to aktive staver som ble montert inn i fagverket som vist i figur 5.39.

De aktive stavene har en piezoelektrisk aktuator og en piezoelektrisk lastcelle, som er en kraftmåler. Forlengelsen av aktuator i , hvor $i \in \{1, 2\}$, betegnes d_i og kraft målt av lastcelle i betegnes y_i . Regulatoren som ble brukt var $d_i(s) = -h_{ri}(s)y_i(s)$ hvor $h_{ri}(s) = K_{pi}/s$. Med denne regulatoren er hver av de aktive stavene med regulator en passiv mekanisk toport som dissiperer effekt. Siden fagverket er en passiv konstruksjon som ikke genererer effekt, må det regulerede systemet bli stabilt. Videre vil de aktive stavene redusere vibrasjonene i fagverket ved at vibrasjonsenergi dissiperes. Responsen på et kraftstøt mot fagverket med og uten aktiv demping er vist i figur 5.40 for den ene aktive staven.

⁵Dette delkapittelet beskriver arbeid utført av dr.ing.-student Rakel K. Kanestrøm ved Institutt for teknisk kybernetikk

5.19 Begrenset reell og positiv reell

For lineære tidsinvariante systemer er to viktige egenskaper **begrenset reell** og **positiv reell**. Vi skal snart se at et lineært tidsinvariant system er positivt reelt hvis og bare hvis det er passivt, mens spredningsrepresentasjonen av et lineært tidsinvariant passivt system er begrenset reell.

Vi betrakter et lineært tidsinvariant system $y(s) = h(s)u(s)$ med pådrag u og måling y . Innfallende bølge defineres ved $a \triangleq y + u$ og reflektert bølge defineres ved $b \triangleq y - u$. Spredningsfunksjonen $g(s)$ gitt ved

$$g(s) = \frac{h(s) - 1}{1 + h(s)} \quad (5.242)$$

oppfyller $b(s) = g(s)a(s)$. Vi legger merke til at

$$u(t)y(t) = \frac{1}{4}[a^2(t) - b^2(t)] \quad (5.243)$$

og at passivitet betyr at hvis energifunksjonen $V(t)$ er lik null for $t = 0$, dvs. $V(0) = 0$, så gjelder

$$V(T) = \int_0^T u(t)y(t)dt = \frac{1}{4} \int_0^T [a^2(t) - b^2(t)]dt \geq 0 \quad (5.244)$$

Egenskapene begrenset reell og positiv reell defineres for funksjoner som er analytiske i høyre halvplan, men funksjonene er ikke nødvendigvis rasjonale. En funksjon er analytisk i $\text{Re}[s] > 0$ hvis den er definert og deriverbar for alle $\text{Re}[s] > 0$. Et punkt hvor en funksjon opphører å være analytisk betegnes som en singularitet. Singularitetene til en rasjonal funksjon betegnes som poler. En rasjonal funksjon er dermed analytisk i $\text{Re}[s] > 0$ hvis den ikke har poler i $\text{Re}[s] > 0$.

Definisjon 5.5 En funksjon $g(s)$ sies å være begrenset reell hvis

1. $g(s)$ er analytisk i $\text{Re}[s] > 0$.
2. $g(s)$ er reell for reelle positive s .
3. $|g(s)| \leq 1$ for alle $\text{Re}[s] > 0$.

■

Teorem 5.8 Gitt et lineært tidsinvariant system $y(s) = h(s)u(s)$, og spredningsrepresentasjonen $a = y + u$, $b = y - u$ og $b(s) = g(s)a(s)$ hvor

$$g(s) = \frac{h(s) - 1}{1 + h(s)} \quad (5.245)$$

Da er $h(s)$ passiv hvis og bare hvis $g(s)$ er begrenset reell.

Bevis: Vi betrakter (5.244), og lar T gå til uendelig. Hvis $a \in L_2$, hvilket betyr at $\int_0^\infty a^2(t)dt < \infty$, så er

$$\infty > \int_0^\infty a^2(t)dt \geq \int_0^\infty b^2(t)dt \quad (5.246)$$

hvilket vil si at $b \in L_2$. Det følger av teorem 6.1 at hvis funksjonen $g(s)$ er rasjonal kan den ikke ha poler for $\text{Re}[s] > 0$ siden dette kunne føre til eksponentiell vekst i $b(t)$ som ville gitt et ubegrenset integral $\int_0^\infty b^2(t)dt$. Tilsvarende resultat fins for ikke-rasjonale funksjoner. Betingelse 1 er dermed vist.

La σ_0 være en vilkårlig reell positiv konstant, og la $a(t) = e^{\sigma_0 t} \mu(t)$ hvor $\mu(t)$ er en enhets sprangfunksjon. Da er den Laplacetransformerte av $a(t)$ lik $a(s) = \frac{1}{s-\sigma_0}$, mens $b(s) = \frac{g(s)}{s-\sigma_0}$.

Anta at systemet ikke er eksitert initielt slik at alle transienter er lik null. Invers Laplacetransformasjon for rasjonal $g(s)$ gir

$$b(t) = \sum_{i=1}^n (\text{Res}_{s=s_i} \frac{g(s)}{s-\sigma_0}) e^{s_i t} + (\text{Res}_{s=\sigma_0} \frac{g(s)}{s-\sigma_0}) e^{\sigma_0 t}$$

hvor s_i er polene til $g(s)$, som ligger i det lukkede venstre halvplan, og $\text{Res}_{s=\sigma_0} \frac{g(s)}{s-\sigma_0} = g(\sigma_0)$. Når $t \rightarrow \infty$ vil leddet med $e^{\sigma_0 t}$ dominere over ledd med $e^{s_i t}$, og $b(t)$ vil gå mot $g(\sigma_0) e^{\sigma_0 t}$. Også for ikke-rasjonale $g(s)$ fås samme grenseverdi for $b(t)$. Siden $a(t)$ er reell, så må også $g(\sigma_0)$ være reell, og betingelse 2 er vist.

La nå $s_0 = \sigma_0 + j\omega_0$ være et vilkårlig punkt i $\text{Re}[s] > 0$. La $a(t)$ være $\text{Re}[e^{s_0 t} \mu(t)]$. Når $t \rightarrow \infty$ så vil $b(t)$ gå mot $\text{Re}[g(s_0) e^{s_0 t}]$ og effekten

$$P(t) \triangleq \frac{1}{4} [a^2(t) - b^2(t)] \quad (5.247)$$

blir

$$P(t) = \frac{1}{4} [e^{2\sigma_0 t} \cos^2 \omega_0 t - |g(s_0)|^2 e^{2\sigma_0 t} \cos^2(\omega_0 t + \phi)]$$

hvor $\phi = \arg[g(s_0)]$. Ved å benytte identiteten $\cos^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha)$ fremkommer

$$\begin{aligned} P(t) &= \frac{1}{8} (1 + \cos 2\omega_0 t) e^{2\sigma_0 t} - \frac{1}{8} |g(s_0)|^2 [1 + \cos(2\omega_0 t + 2\phi)] \\ &= \frac{1}{8} [1 - |g(s_0)|^2] e^{2\sigma_0 t} + \frac{1}{8} e^{2\sigma_0 t} \cos 2\omega_0 t - \frac{1}{8} |g(s_0)|^2 e^{2\sigma_0 t} \cos(2\omega_0 t + 2\phi) \\ &= \frac{1}{8} [1 - |g(s_0)|^2] e^{2\sigma_0 t} + \frac{1}{8} \text{Re}[e^{2s_0 t}] - \frac{1}{8} \text{Re}[g(s_0)^2 e^{2s_0 t}] \\ &= \frac{1}{8} [1 - |g(s_0)|^2] e^{2\sigma_0 t} + \frac{1}{8} \text{Re}[1 - g(s_0)^2 e^{2s_0 t}] \end{aligned} \quad (5.248)$$

I dette uttrykket for $P(t)$ er s_0 og σ_0 konstanter, og vi kan integrere $P(t)$ og få energien $V(T)$:

$$\begin{aligned} V(T) &= \int_{-\infty}^T P(t) dt \\ &= \frac{1}{8} \int_{-\infty}^T \{ [1 - |g(s_0)|^2] e^{2\sigma_0 t} + \frac{1}{8} \text{Re}[1 - g(s_0)^2 e^{2s_0 t}] \} dt \\ &= \frac{1}{16\sigma_0} [1 - |g(s_0)|^2] e^{2\sigma_0 T} + \frac{1}{16} \text{Re} \left\{ \frac{1}{s_0} [1 - g(s_0)^2] e^{2s_0 T} \right\} \end{aligned} \quad (5.249)$$

Anta først at $\omega_0 \neq 0$. Da vil vinkelen til $\frac{1}{s_0} [1 - g(s_0)^2] e^{2s_0 T}$ anta alle verdier mellom 0 og 2π når T varierer. Dette skyldes at $e^{2s_0 T} = e^{2\sigma_0 T} e^{2j\omega_0 T}$. For visse verdier for T vil da

$$\text{Re} \left\{ \frac{1}{s_0} [1 - g(s_0)^2] e^{2s_0 T} \right\} = 0$$

Siden $V(T) \geq 0$ for alle T må dermed

$$\frac{1}{16\sigma_0} [1 - |g(s_0)|^2] e^{2\sigma_0 T} \geq 0$$

↓

$$1 - |g(s_0)|^2 \geq 0$$

Anta så at $\omega_0 = 0$ slik at $s_0 = \sigma_0$ er reell. Da er også $g(s_0)$ reell, og de to leddene i uttrykket for $V(T)$ blir like. Det følger at

$$0 \leq V(T) = \frac{1}{8\sigma_0} [1 - g^2(s_0)] e^{2\sigma_0 T}$$

Vi har dermed vist at for alle s_0 i $\text{Re}[s] > 0$ så er

$$1 - |g(s_0)|^2 \geq 0 \Rightarrow |g(s_0)| \leq 1$$

Implikasjon motsatt vei vises ved å anta at $g(s)$ er begrenset reell, og så vise at $V(T) \geq 0$ for alle T . Dette er vist i [42]. ■

Betingelsen på $g(s)$ er gitt i det åpne høyre halvplan, og vi ønsker nå å finne en ekvivalent betingelse for frekvensresponsen $g(j\omega)$, som fremkommer ved å sette $s = j\omega$. Det er klart at hvis $g(s)$ er begrenset reell, så kan ikke $g(s)$ ha noen pol på $j\omega$ -aksen siden absoluttverdien av $g(s)$ vil være ubegrenset i nærheten av en pol. Derfor må grenseverdien

$$g(j\omega) = \lim_{\substack{\sigma \rightarrow 0 \\ \sigma > 0}} g(\sigma + j\omega)$$

eksistere for alle ω og videre må

$$|g(j\omega)| \leq 1$$

for alle ω . Fra kompleks analyse har man følgende teorem (*Maximum modulus theorem*):

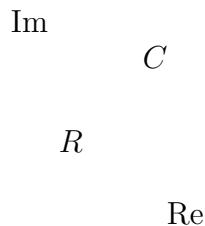
Teorem 5.9 La $f(s)$ være en funksjon som ikke har poler innenfor eller på en lukket kontur C i det komplekse plan. La M være øvre begrensning på $|f(s)|$ på C . Da er $|f(s)| \leq M$ innenfor C , og likhetstegnet er oppfylt for et punkt innenfor C hvis og bare hvis $f(s)$ er en konstant.

Dette er vist i [21]. ■

Vi definerer konturen C som omslutter høyre halvplan som vist i figur 5.41. En interessant konsekvens av teorem 5.9 er at hvis $g(s)$ er begrenset reell og $|g(s)| = 1$ for et punkt i $\text{Re}[s] > 0$, så oppfylder $|g(s)|$ sitt maksimum inne i det åpne høyre halvplan, og dermed må $g(s)$ være konstant i $\text{Re}[s] > 0$. Siden $g(s)$ er reell for reelle $s > 0$, må derfor $g(s) = 1$ for alle s i $\text{Re}[s] \geq 0$. Dette medfører at $[1 - g(s)]^{-1}$ har singulariteter i $\text{Re}[s] > 0$ hvis og bare hvis $g(s) = 1$ for alle s i $\text{Re}[s] \geq 0$.

Videre følger det av teorem 5.9 at hvis $|g(j\omega)| \leq 1$ for alle ω , og $g(s)$ ikke har poler i det lukkede høyre halvplan, så er $|g(s)| \leq 1$ for alle $\text{Re}[s] > 0$ og $g(s)$ er begrenset reell. Dette formuleres som følger

Teorem 5.10 En rasjonal funksjon $g(s)$ er begrenset reell hvis og bare hvis

Figur 5.41: *Konturen C*

1. $g(s)$ ikke har poler i $\text{Re}[s] \geq 0$.
2. $|g(j\omega)| \leq 1$ for alle ω .

■

Definisjon 5.6 En transferfunksjon $h(s)$ sies å være positiv reell hvis

1. $h(s)$ er analytisk i $\text{Re}[s] > 0$.
2. $h(s)$ er reell for reelle positive s .
3. $\text{Re}[h(s)] \geq 0$ for alle $\text{Re}[s] > 0$.

■

Teorem 5.11 Gitt et lineært tidsinvariant system $y(s) = h(s)u(s)$, og spredningsrepresentasjonen $a = y + u$, $b = y - u$ og $b(s) = g(s)a(s)$ hvor

$$g(s) = \frac{h(s) - 1}{1 + h(s)} \quad (5.250)$$

Anta at $g(s) \neq 1$ for alle $\text{Re}[s] > 0$. Da er $h(s)$ positiv reell hvis og bare hvis $g(s)$ er begrenset reell.

Bevis: Vi antar at $g(s)$ er begrenset reell, og at $g(s) \neq 1$ for alle $\text{Re}[s] > 0$. Da eksisterer $[1 - g(s)]^{-1}$ for alle s i $\text{Re}[s] > 0$. Fra (5.250) finner vi at

$$h(s) = \frac{1 + g(s)}{1 - g(s)} \quad (5.251)$$

Det er klart at $h(s)$ må være analytisk i $\text{Re}[s] > 0$ siden $g(s)$ er analytisk i $\text{Re}[s] > 0$, og $[1 - g(s)]$ er antatt å være ikke-singulær i $\text{Re}[s] > 0$. For å påvise at $\text{Re}[h(s)] \geq 0$ for alle $\text{Re}[s] > 0$ betrakter vi følgende utregning:

$$\begin{aligned} 2\text{Re}[h(s)] &= h^*(s) + h(s) \\ &= \frac{1 + g^*(s)}{1 - g^*(s)} + \frac{1 + g(s)}{1 - g(s)} \\ &= \frac{[1 + g^*(s)][1 - g(s)] + [1 - g^*(s)][1 + g(s)]}{[1 - g^*(s)][1 - g(s)]} \\ &= 2 \frac{1 - g^*(s)g(s)}{[1 - g^*(s)][1 - g(s)]} \end{aligned} \quad (5.252)$$

Vi ser at hvis $g(s)$ er begrenset reell, så er $\operatorname{Re}[h(s)] \geq 0$ for alle $\operatorname{Re}[s] > 0$.

Vi antar så at $h(s)$ er positiv reell. Da er $h(s)$ analytisk i $\operatorname{Re}[s] > 0$, og $[1 + h(s)]$ må være ikke-singulær i $\operatorname{Re}[s] > 0$ siden $\operatorname{Re}[h(s)] \geq 0$ i $\operatorname{Re}[s] > 0$. Dermed må $g(s)$ være analytisk i $\operatorname{Re}[s] > 0$. Fra (5.252) fremgår det at $|g(s)| \leq 1$ i $\operatorname{Re}[s] > 0$, og det følger at $g(s)$ er begrenset reell. ■

Fra teorem 5.8 og teorem 5.11 følger det at:

Korollar 5.3 Transferfunksjonen $h(s)$ er passiv hvis og bare hvis den er positiv reell. ■

Eksempel 5.12 Et grunnleggende resultat i elektrisk kretsteori er at hvis en transferfunksjon $h(s)$ er rasjonal og positiv reell, så fins det en elektrisk enport som består av passive, lineære, tidsinvariante motstander, kondensatorer og spoler, slik at $h(s)$ er enportens impedans [8, s. 815]. Hvis e er spenningen over enporten og i er strøm inn på enporten er da $e(s) = h(s)i(s)$. Impedansen til en elektrisk enport som består av passive komponenter må være passiv siden totalenergien V i enporten oppfyller

$$\dot{V}(t) = e(t)i(t) - g(t) \quad (5.253)$$

hvor $g(t)$ representerer effekttap. ■

Eksempel 5.13 Transferfunksjonen

$$h(s) = \frac{1}{\tanh s} \quad (5.254)$$

er ikke rasjonal, og vi kan ikke avgjøre om transferfunksjonen er positiv reell ut fra frekvensresponsen $h(j\omega)$. Her er $\tanh s = \sinh s / \cosh s$, mens $\sinh s = \frac{1}{2}(e^s - e^{-s})$ og $\cosh s = \frac{1}{2}(e^s + e^{-s})$.

Vi undersøker først om $h(s)$ er analytisk i høyre halvplan. Singularitetene er gitt av

$$\sinh s = 0 \Rightarrow e^s - e^{-s} = 0 \Rightarrow e^s(1 - e^{-2s}) = 0$$

Her vil $|e^s| \geq 1$ for $\operatorname{Re}[s] > 0$. Videre vil

$$e^s(1 - e^{-2s}) = 0 \Rightarrow e^{-2s} = 1$$

som gir singulariteter i

$$s_k = jk\pi, \quad k \in \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\} \quad (5.255)$$

som ligger på den imaginære akse. Dette betyr at $h(s)$ er analytisk i $\operatorname{Re}[s] > 0$. Videre er det klart at $h(s)$ er reell for reelle s .

Til slutt må vi undersøke om $h(s)$ har positiv realdel for $\operatorname{Re}[s] > 0$. Vi setter $s = \sigma + j\omega$ og finner at

$$\begin{aligned} \cosh s &= \frac{1}{2}[e^\sigma(\cos \omega + j \sin \omega) + e^{-\sigma}(\cos \omega - j \sin \omega)] \\ &= \cosh \sigma \cos \omega + j \sinh \sigma \sin \omega \end{aligned} \quad (5.256)$$

og tilsvarende blir

$$\sinh s = \sinh \sigma \cos \omega + j \cosh \sigma \sin \omega \quad (5.257)$$

Realdelen til $h(s)$ finnes dermed å være

$$\operatorname{Re}[h(s)] = \frac{\cosh \sigma \sinh \sigma}{|\sinh s|^2} \quad (5.258)$$

som er større enn null i $\operatorname{Re}[s] > 0$. Dette betyr at $h(s)$ er positiv reell, og dermed passiv. ■

For rasjonale transferfunksjoner kan vi finne betingelser på frekvensresponsen for at transferfunksjonen skal være positiv reell. Dette er formulert i følgende teorem:

Teorem 5.12 En rasjonal funksjon $h(s)$ er positiv reell hvis og bare hvis

1. $h(s)$ ikke har poler i $\operatorname{Re}[s] > 0$.
2. $\operatorname{Re}[h(j\omega)] \geq 0$ for alle ω som er slik at $j\omega$ ikke er en pol for $h(s)$.
3. Hvis $s = j\omega_0$ er en pol for $h(s)$, så er det en enkel pol, og hvis ω_0 er endelig, så er residuet

$$\operatorname{Res}_{s=j\omega_0} h(s) = \lim_{s \rightarrow j\omega_0} (s - j\omega_0) h(s)$$

reelt og positivt. Hvis ω_0 er uendelig, så er grenseverdien

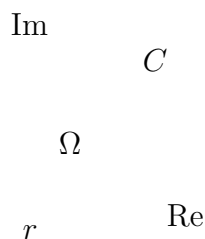
$$R_\infty \triangleq \lim_{\omega \rightarrow \infty} \omega \frac{h(j\omega)}{j\omega}$$

reell og positiv.

Bevis: Vi må her vise at betingelse 1 og 2 i dette teoremet er ekvivalent med betingelsen

$$\operatorname{Re}[h(s)] \geq 0 \text{ for alle } \operatorname{Re}[s] > 0 \quad (5.259)$$

under antagelsen at $h(s)$ ikke har poler i $\operatorname{Re}[s] > 0$. Først viser vi at betingelse 2 og 3 impliserer (5.259):



Figur 5.42: Konturen C vist for en $h(s)$ med en pol i origo og de øvrige polene i den åpne venstre halvplan

Anta at betingelse 2 og 3 er oppfylt. Vi benytter en kontur C som vist i figur 5.42 som går fra $-j\Omega$ til $j\Omega$ langs $j\omega$ -aksen med små halvsirkler inn i høyre halvplan rundt

punkter $j\omega_0$ som er poler for $h(s)$. Her er Ω en tilstrekkelig stor verdi. Konturen C lukkes med en halvsirkel inn i høyre halvplan. På den delen av C som ligger på $j\omega$ -aksen er $\text{Re}[h(s)] \geq 0$ i følge betingelse 2. På de små halvsirkelene omkring polene er

$$h(s) \approx \frac{\text{Res}_{s=j\omega_0} h(s)}{s - j\omega_0} \quad (5.260)$$

Siden $\text{Re}[s] \geq 0$ på halvsirkelene og $\text{Res}_{s=j\omega_0} h(s)$ er reelt og positivt ifølge betingelse 3 er $\text{Re}[h(s)] \geq 0$ på disse halvsirkelene. På den store halvsirkelen inn i høyre halvplan med radius Ω er også $\text{Re}[h(s)] \geq 0$ og verdien er konstant og lik $\lim_{\omega \rightarrow \infty} \text{Re}[h(j\omega)]$. Hvis $h(s)$ har en pol i uendelig, så er $h(s) \approx sR_\infty$ på den store halvsirkelen. Vi kan konkludere at $\text{Re}[h(s)] \geq 0$ på C . Vi definerer funksjonen

$$f(s) = e^{-\text{Re}[h(s)]}$$

Da er $|f(s)| \leq 1$ på C , og det følger av teorem 5.9 at $|f(s)| \leq 1$ i hele $\text{Re}[s] > 0$. Dermed må $\text{Re}[h(s)] \geq 0$ i $\text{Re}[s] > 0$, og (5.259) er vist.

Anta så at (5.259) er oppfylt. Betingelse 2 følger av at

$$h(j\omega) = \lim_{\substack{\sigma \rightarrow 0 \\ \sigma > 0}} g(\sigma + j\omega)$$

eksisterer for alle ω som ikke er pol for $h(s)$, hvilket gir

$$\text{Re}[h(j\omega)] \geq 0$$

for alle ω som ikke er pol for $h(s)$. For å vise betingelse 3 antar vi at ω_0 er en pol av orden m for $h(s)$. Vi betrakter en liten halvsirkel om $j\omega_0$ inn i høyre halvplan med radius r . På sirkelen er dermed $s - j\omega_0 = re^{j\theta}$ hvor $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$. Da er

$$h(s) \approx \frac{\text{Res}_{s=j\omega_0} h(s)}{r^m e^{jm\theta}} = \frac{\text{Res}_{s=j\omega_0} h(s)}{r^m} e^{-jm\theta} \quad (5.261)$$

Her er åpenbart $m = 1$ eneste mulighet for å oppnå $\text{Re}[h(s)] \geq 0$ siden leddet $e^{-jm\theta}$ gir en vinkel mellom $-m\pi/2$ og $m\pi/2$ i det komplekse plan. Videre må $\text{Res}_{s=j\omega_0} h(s)$ være positivt og reelt siden vil $e^{-jm\theta}$ gi vinkel fra $-\pi/2$ og $\pi/2$ når $m = 1$. Betingelse 3 er dermed vist. ■

Vi betrakter så et multivariabelt system

$$\mathbf{y}(s) = \mathbf{H}(s)\mathbf{u}(s) \quad (5.262)$$

hvor pådragsvektor \mathbf{u} og målevекtor \mathbf{y} er av dimensjon m . Vi definerer bølgevariable

$$\mathbf{a} = \mathbf{y} + \mathbf{u} \quad \text{og} \quad \mathbf{b} = \mathbf{y} - \mathbf{u} \quad (5.263)$$

Da er $\mathbf{a}(s) = (\mathbf{H}(s) + \mathbf{I})\mathbf{u}(s) \Rightarrow \mathbf{u}(s) = (\mathbf{H}(s) + \mathbf{I})^{-1}\mathbf{a}(s)$ og

$$\mathbf{b}(s) = (\mathbf{H}(s) - \mathbf{I})\mathbf{u}(s) \quad (5.264)$$

Dette gir

$$\mathbf{b}(s) = \mathbf{S}(s)\mathbf{a}(s) \quad (5.265)$$

hvor spredningsmatrisen er

$$\mathbf{S}(s) = [\mathbf{H}(s) - \mathbf{I}][\mathbf{H}(s) + \mathbf{I}]^{-1} \quad (5.266)$$

Definisjon 5.7 En spredningsmatrise $\mathbf{S}(s)$ sies å være begrenset reell hvis

1. Elementene i $\mathbf{S}(s)$ er analytiske i $\text{Re}[s] > 0$.
2. $\mathbf{S}(s)$ er reell for reelle positive s .
3. $\mathbf{I} - \mathbf{S}^*(s)\mathbf{S}(s) \geq 0$ for alle $\text{Re}[s] > 0$.

■

Som for monovariabel systemer har vi:

- $\mathbf{H}(s)$ er passiv hvis og bare hvis $\mathbf{S}(s)$ er begrenset reell [1].

Videre har vi følgende teorem som er hentet fra [1].

Teorem 5.13 En rasjonal spredningsmatrise $\mathbf{S}(s)$ er begrenset reell hvis og bare hvis

1. Elementene i $\mathbf{S}(s)$ ikke har poler for $\text{Re}[s] > 0$.
2. $\mathbf{S}(s)$ er reell for reelle positive s .
3. $\mathbf{I} - \mathbf{S}^*(j\omega)\mathbf{S}(j\omega) \geq 0$ for alle $\text{Re}[s] > 0$.

■

5.20 Transmisjonslinjer

I det følgende utledes dynamiske modeller for en elektrisk transmisjonslinje basert på [36]. Deretter undersøkes transferfunksjoner, spredningsfunksjoner og passivitetsegenskaper. I passivitetsammenheng er transmisjonslinjer et interessant eksempel siden de dynamiske ligningene er lineære, men av uendelig dimensjon på grunn av distribuerte fenomener.

5.20.1 Dynamisk modell

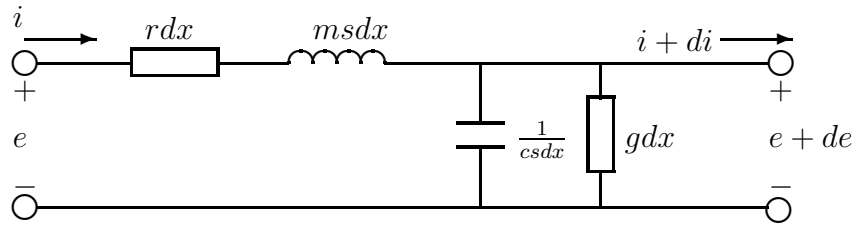
En dynamisk modell for en elektrisk transmisjonslinje finnes ved å sette opp Kirchhoffs lover for et lengdeelement dx av transmisjonslinjen. Linjen modelleres som vist i figur 5.43 med en distribuert serieimpedans bestående av en resistans rdx i serie med en induktans mdx i tillegg til en distribuert parallelladmittans av en kapasitans cdx i parallell med en resistans med admittans gdx . Spenningen betegnes $e(x, t)$ mens strømmen betegnes $i(x, t)$ hvor x er lengdekoordinaten langs linjen.

For spenningen har vi

$$e(x + dx, t) = e(x, t) - rdx i(x, t) - mdx \frac{\partial i}{\partial t}(x, t) \quad (5.267)$$

mens for strømmen gjelder

$$i(x + dx, t) = i(x, t) - gdx e(x + dx, t) - cdx \frac{\partial e}{\partial t}(x + dx, t) \quad (5.268)$$



Figur 5.43: Lengdeelement av elektrisk transmisjonslinje

Ved å dividere ligningene

$$e(x + dx, t) = e(x, t) + \frac{\partial e}{\partial x}(x, t)dx \quad \text{og} \quad i(x + dx, t) = i(x, t) + \frac{\partial i}{\partial x}(x, t)dx \quad (5.269)$$

med dx og la dx gå til null fås

$$\frac{\partial e}{\partial x}(x, t) = -ri(x, t) - m\frac{\partial i}{\partial t}(x, t) \quad (5.270)$$

$$\frac{\partial i}{\partial x}(x, t) = -ge(x, t) - c\frac{\partial e}{\partial t}(x, t) \quad (5.271)$$

Vi deriverer spenningsligningen med hensyn på x og strømligningen med hensyn på t . Dette gir

$$\frac{\partial^2 e}{\partial x^2}(x, t) = -r\frac{\partial i}{\partial x}(x, t) - m\frac{\partial^2 i}{\partial t \partial x}(x, t) \quad (5.272)$$

$$\frac{\partial^2 i}{\partial t \partial x}(x, t) = -g\frac{\partial e}{\partial t}(x, t) - c\frac{\partial^2 e}{\partial t^2}(x, t) \quad (5.273)$$

Den såkalte telegraflikningen fremkommer nå ved å sette inn strømligningen i spenningsligningen:

$$\frac{\partial^2 e}{\partial x^2}(x, t) = mc\frac{\partial^2 e}{\partial t^2}(x, t) + (rc + gm)\frac{\partial e}{\partial t}(x, t) + rge(x, t) \quad (5.274)$$

Laplacetransformasjon av telegraflikningen gir

$$\frac{\partial^2 e}{\partial x^2}(x, s) = [mcs^2 + (rc + gm)s + rg]e(x, s) \quad (5.275)$$

Vi definerer den komplekse funksjonen $\gamma(s)$ ved

$$\gamma(s) = \sqrt{(r + ms)(g + cs)}, \quad \text{Re}[\gamma(s)] \geq 0 \quad \text{for} \quad \text{Re}[s] \geq 0 \quad (5.276)$$

Generelt har kvadratrotten av et komplekst tall z to røtter som ligger symmetrisk om origo. Hvis z er gitt på polar form ved $z = r \exp(j\theta)$, er kvadratrøttene gitt ved $\sqrt{z} = \pm\sqrt{r} \exp(j\theta/2)$. Her velger vi $\gamma(s)$ som roten med positiv realdel for alle s med $\text{Re}[s] > 0$. Vi definerer $\alpha(s) = \text{Re}[\gamma(s)]$ og $\beta(s) = \text{Im}[\gamma(s)]$ slik at

$$\gamma(s) = \alpha(s) + j\beta(s) \quad (5.277)$$

Da er $\alpha(s) \geq 0$ for alle $\text{Re}[s] > 0$. Setter vi $s = \sigma + j\omega$ hvor $\sigma, \omega \in \mathbb{R}$ er i tillegg $\omega\beta(s) \geq 0$ for alle $\text{Re}[s] > 0$ siden $\gamma(s)^2 = (r + ms)(g + cs)$ ligger i første eller andre

kvadrant for alle $\omega > 0$ og i tredje eller fjerde kvadrant for alle $\omega < 0$. Ved bruk av $\gamma(s)^2 = (r + ms)(g + cs)$ kan vi skrive

$$\frac{\partial^2 e}{\partial x^2}(x, s) = \gamma^2(s)e(x, s) \quad (5.278)$$

Denne differensialligningen har løsningen

$$e(x, s) = C_1 \exp[\gamma(s)x] + C_2 \exp[-\gamma(s)x] \quad (5.279)$$

Laplacetransformasjon av (5.270) gir

$$(r + ms)i(x, s) = -\frac{\partial e}{\partial x}(x, s) \quad (5.280)$$

Videre defineres transmisjonslinjens karakteristiske impedans $z_0(s)$ ved

$$z_0(s) = \sqrt{\frac{r + ms}{g + cs}}, \quad \operatorname{Re}[z_0(s)] \geq 0 \text{ for } \operatorname{Re}[s] > 0 \quad (5.281)$$

Som for $\gamma(s)$ må vi velge hvilken kvadratroten vi skal bruke for $z_0(s)$. Her velges kvadratroten slik at $\operatorname{Re}[z_0(s)] \geq 0$ for $\operatorname{Re}[s] > 0$ hvilket impliserer at $z_0(s)$ er positiv reell og dermed passiv i følge kapittel 5.19. Antagelsene på realdelen av $z_0(s)$ og $\gamma(s)$ er konsistente siden $z_0(s) = (r + ms)/\gamma(s)$. Dermed har man for $s = \sigma + j\omega$ at

$$\operatorname{Re}[z_0(\sigma + j\omega)] = \frac{(r + m\sigma)\alpha + \omega\beta m}{\alpha^2 + \beta^2} \geq 0 \text{ for alle } \operatorname{Re}[s] > 0 \quad (5.282)$$

Løsningen for strømmen finnes å være

$$i(x, s) = -\frac{1}{z_0(s)} \{C_1 \exp[\gamma(s)x] - C_2 \exp[-\gamma(s)x]\} \quad (5.283)$$

Konstantene C_1 og C_2 elimineres ved å sette inn grensebetingelsene $e(0, s) = e_1$, og $i(0, s) = i_1$. Dette gir

$$C_1 = \frac{1}{2}(e_1 - z_0 i_1) \quad \text{og} \quad C_2 = \frac{1}{2}(e_1 + z_0 i_1) \quad (5.284)$$

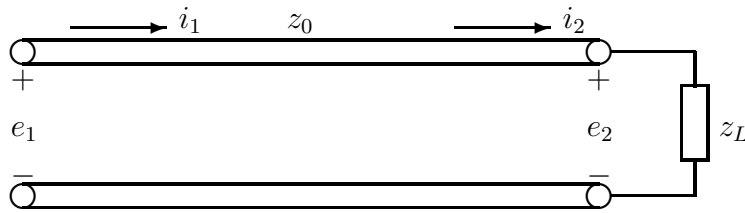
Vi setter nå inn grensebetingelsene $e(\ell, s) = e_2$ og $i(\ell, s) = i_2$ og konstantene C_1 og C_2 , benytter $\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$, $\cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ og $\tanh x = \sinh x / \cosh x$. Dette gir

$$\begin{pmatrix} e_2(s) \\ i_2(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh[\gamma(s)\ell] & -z_0(s) \sinh[\gamma(s)\ell] \\ -\frac{1}{z_0(s)} \sinh[\gamma(s)\ell] & \cosh[\gamma(s)\ell] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1(s) \\ i_1(s) \end{pmatrix} \quad (5.285)$$

5.20.2 Transferfunksjoner

Anta at transmisjonslinjen er koblet til en enport med spenning e_L , strøm i_L inn på enporten og impedans $z_L(s)$ slik at $e_L(s) = z_L(s)i_L(s)$ (figur 5.44). Ved seriekobling er $e_2 = e_L$ og $i_2 = i_L$ siden i_2 er definert som strømmen ut av transmisjonslinjen. Dette gir $e_2 = z_L(s)i_2(s)$. Fra (5.285) finner vi da

$$e_2(s) = \cosh[\gamma(s)\ell]e_1(s) - z_0(s) \sinh[\gamma(s)\ell]i_1(s) \quad (5.286)$$

Figur 5.44: Elektrisk transmisjonslinje med belastningsimpedans $z_L(s)$

$$e_2(s) = -\frac{z_L(s)}{z_0(s)} \sinh[\gamma(s)\ell] e_1(s) + z_L(s) \cosh[\gamma(s)\ell] i_1(s) \quad (5.287)$$

Ved å multiplisere (5.287) med $(z_0/z_L) \tanh[\gamma(s)\ell]$ og addere resultatet til (5.286) finner vi at

$$e_2(s) + \frac{z_0}{z_L} \tanh[\gamma(s)\ell] e_2(s) = \cosh[\gamma(s)\ell] e_1(s) - \tanh[\gamma(s)\ell] \sinh[\gamma(s)\ell] e_1(s) \quad (5.288)$$

Dette gir transferfunksjonen

$$\frac{e_2}{e_1}(s) = \frac{\cosh[\gamma(s)\ell] - \tanh[\gamma(s)\ell] \sinh[\gamma(s)\ell]}{1 + \frac{z_0}{z_L} \tanh[\gamma(s)\ell]} \quad (5.289)$$

Siden $\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1$ for alle $z \in \mathbb{C}$ kan dette forenkles til

$$h_e(s) \triangleq \frac{e_2}{e_1}(s) = \frac{1}{\frac{z_0}{z_L} \sinh[\gamma(s)\ell] + \cosh[\gamma(s)\ell]} \quad (5.290)$$

Med en tilsvarende fremgangsmåte finner man at

$$h_i(s) \triangleq \frac{i_2}{i_1}(s) = \frac{1}{\frac{z_L}{z_0} \sinh[\gamma(s)\ell] + \cosh[\gamma(s)\ell]} \quad (5.291)$$

Generelt vil ikke $h_e(s)$ og $h_i(s)$ være passive.

Ligning (5.285) kan skrives

$$\begin{aligned} & \cosh[\gamma(s)\ell] e_1(s) - z_0(s) \sinh[\gamma(s)\ell] i_1(s) \\ &= z_L(s) \left\{ -\frac{1}{z_0(s)} \sinh[\gamma(s)\ell] e_1(s) + \cosh[\gamma(s)\ell] i_1(s) \right\} \end{aligned} \quad (5.292)$$

Dette gir transferfunksjonen fra i_1 til e_1 :

$$\frac{e_1}{i_1}(s) = z_0(s) \frac{z_L(s) \cosh[\gamma(s)\ell] + z_0(s) \sinh[\gamma(s)\ell]}{z_0(s) \sinh[\gamma(s)\ell] + z_L(s) \cosh[\gamma(s)\ell]} \quad (5.293)$$

Denne transferfunksjonen er passiv for alle passive z_L , hvilket skal vises i det følgende. I denne forbindelse er det hensiktsmessig å bruke spredningsrepresentasjonen av transmisjonslinjen.

På hybrid form beskrives transmisjonslinjen ved

$$\begin{pmatrix} e_1(s) \\ -i_2(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_0(s) \tanh[\gamma(s)\ell] & \operatorname{sech}[\gamma(s)\ell] \\ -\operatorname{sech}[\gamma(s)\ell] & \frac{1}{z_0(s)} \tanh[\gamma(s)\ell] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_1(s) \\ e_2(s) \end{pmatrix} = \mathbf{G}(s) \begin{pmatrix} i_1(s) \\ e_2(s) \end{pmatrix} \quad (5.294)$$

Spredningsrepresentasjonen defineres ved

$$\begin{pmatrix} b_1(s) \\ b_2(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1(s) - z_0(s)i_1(s) \\ e_2(s) + z_0(s)i_2(s) \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \begin{pmatrix} a_1(s) \\ a_2(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1(s) + z_0(s)i_1(s) \\ e_2(s) - z_0(s)i_2(s) \end{pmatrix} \quad (5.295)$$

siden i_2 er definert som strøm ut av transmisjonslinjen. Spredningsmatrisen blir

$$\mathbf{S}(s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} (\mathbf{G}(s) - I)(\mathbf{G}(s) + I)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \exp[-\gamma(s)\ell] \\ \exp[-\gamma(s)\ell] & 0 \end{pmatrix} \quad (5.296)$$

hvilket gir ligningene

$$b_1(s) = \exp[-\gamma(s)\ell]a_2(s) \quad (5.297)$$

$$b_2(s) = \exp[-\gamma(s)\ell]a_1(s) \quad (5.298)$$

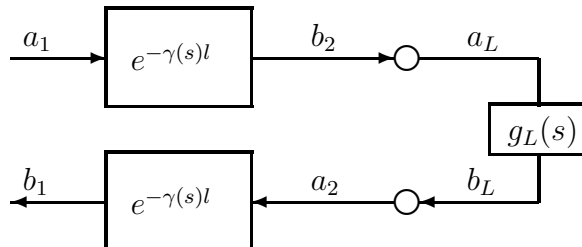
Spredningsmatrisen $\mathbf{S}(s)$ er analytisk i $\text{Re}[s] > 0$ og reell for reelle positive s . Videre er

$$\mathbf{S}^*(s)\mathbf{S}(s) = \exp\{[-\gamma(s) - \gamma^*(s)]\ell\} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \exp[-2\alpha(s)\ell] \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (5.299)$$

og dermed er

$$\mathbf{I} - \mathbf{S}^*(s)\mathbf{S}(s) = (1 - \exp[-2\alpha(s)\ell])\mathbf{I} \geq 0 \quad \text{i} \quad \text{Re}[s] > 0 \quad (5.300)$$

siden $\alpha(s) \geq 0$ for alle $\text{Re}[s] > 0$, hvilket impliserer at $e^{-2\alpha(s)\ell} \leq 1$ for alle $\text{Re}[s] > 0$. Fra kapittel 5.19 har vi da at spredningsmatrisen er begrenset reell, og det følger at transmisjonslinjen er en passiv toport.



Figur 5.45: Spredningsrepresentasjon av elektrisk transmisjonslinje med belastning $g_L(s)$ svarende til belastningsimpedansen $z_L(s)$

Enporten med impedans $z_L(s)$ har spredningsrepresentasjon

$$b_L(s) = g_L(s)a_L(s) \quad (5.301)$$

hvor $b_L = e_L - z_0(s)i_L$ og $a_L = e_L + z_0(s)i_L$ og

$$g_L(s) = \frac{\frac{z_L(s)}{z_0(s)} - 1}{1 + \frac{z_L(s)}{z_0(s)}} = \frac{z_L(s) - z_0(s)}{z_L(s) + z_0(s)} \quad (5.302)$$

Seriekoblingen er gitt av

$$a_2 = b_L \quad \text{og} \quad b_2 = a_L \quad (5.303)$$

og dermed er

$$a_2(s) = g_L(s)b_2(s) \quad (5.304)$$

Dette er vist i figur 5.45. Ved å kombinere denne ligningen med (5.297) og (5.298) finner vi at

$$\frac{b_1}{a_1}(s) = \exp[-2\gamma(s)\ell]g_L(s) \quad (5.305)$$

hvilket vil si at spredningsfunksjonen fra a_1 til b_1 for transmisjonslinje og belastningsimpedans er produktet av belastningens spredningsfunksjon $g_L(s)$ og $\exp[-2\gamma(s)\ell]$. I det tapsfrie tilfelle er $r = 0$ og $g = 0$, hvilket gir $\gamma = \sqrt{mcs}$. Vi definerer bølgehastigheten $v_0 = 1/\sqrt{mc}$ og forplantningstiden $T = \ell/v_0$. Da er

$$\exp[-2\gamma(s)\ell] = \exp(-2Ts) \quad (5.306)$$

som er en tidsforsinkelse på $2T$.

Vi skal se hva dette innebærer i tre viktige tilfeller:

1. Først skal vi se på impedanstilpasning for en tapsfrie transmisjonslinje, som oppnås med $z_L(s) = z_0$. Da er

$$\frac{e_1}{i_1}(s) = z_0 \quad (5.307)$$

mens $g_L(s) = 0$, og dermed er

$$\frac{b_1}{a_1}(s) = 0 \quad (5.308)$$

Her absorberes all bølgeenergi i belastningen.

2. Anta så at belastningen er en kortslutning slik at $e_2 = 0$ hvilket vil si at $z_L(s) = 0$. Da er

$$\frac{e_1}{i_1}(s) = z_0(s) \tanh[\gamma(s)\ell] \quad (5.309)$$

mens $g_L(s) = -1$ og

$$\frac{b_1}{a_1}(s) = -\exp[-2\gamma(s)\ell] \quad (5.310)$$

Her reflekteres den bølgevariable. I det tapsfrie tilfelle er spredningsfunksjonen et fortegnsskift og en tidsforsinkelse på $2T$.

3. Anta belastningen er åpen slik at $i_2 = 0$ og $z_L(s) = \infty$. Da er

$$\frac{e_1}{i_1}(s) = z_0(s) \frac{1}{\tanh[\gamma(s)\ell]} \quad (5.311)$$

mens $g_L(s) = 1$ og

$$\frac{b_1}{a_1}(s) = \exp[-2\gamma(s)\ell] \quad (5.312)$$

Her reflekteres den bølgevariable. I det tapsfrie tilfelle er spredningsfunksjonen en tidsforsinkelse på $2T$.

5.20.3 Passivitetsanalyse

Basert på analysen foran kan vi nå vise at transferfunksjonen fra i_1 til e_1 er passiv hvis $z_L(s)$ er passiv. Dette resultatet kan sees av en energibetraktning siden $e_1 i_1$ er effekten inn på systemet fra inngangen i_1 . Videre gir transmisjonslinjen ohmske energitap gjennom r og g , og den passive impedansen $z_L(s)$ tilfører ikke systemet mer energi enn det som er initielt lagret.

Det er vanskelig å påvise at passivitet følger for alle passive $z_L(s)$ fra transferfunksjonen (5.293). Spredningsformuleringen (5.305) er bedre egnet i dette tilfelle siden

$$g_1(s) \triangleq \frac{b_1}{a_1}(s) = \exp[-2\gamma(s)\ell]g_L(s) \quad (5.313)$$

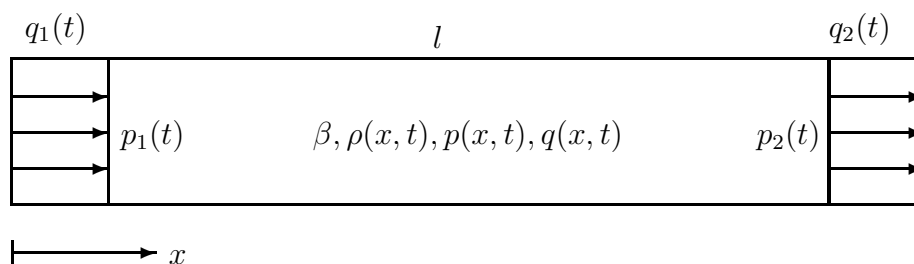
er analytisk i $\text{Re}[s] > 0$ og reell for reelle positive s . Her er $|g_L(s)| \leq 1$ for alle $\text{Re}[s] > 0$ siden $g_L(s)$ er den begrenset reelle spredningsfunksjonen som svarer til den passive transferfunksjonen $z_L(s)$. Videre er

$$|\exp[-2\gamma(s)\ell]| = \exp[-2\alpha(s)\ell] \leq 1$$

for alle $\text{Re}[s] > 0$ siden $\text{Re}[\gamma(s)] \geq 0$ for alle $\text{Re}[s] > 0$. Dette betyr at $|g_1(s)| \leq 1$ for alle $\text{Re}[s] > 0$. Vi har dermed vist at $g_1(s)$ er begrenset reell hvilket igjen betyr at transferfunksjonen fra i_1 til e_1 er passiv.

5.21 Trykkregulering i rørledning

Et rør av lengde ℓ og tverrsnittsareal A inneholder hydraulisk olje med bulkmodul β . Trykket ved innløpet av røret skal reguleres med en servoventil som er montert på innløpet. Volumstrømmen inn i røret gjennom servoventilen er q_1 , mens trykket ved innløpet er p_1 . Tilsvarende er volumstrøm og trykk ved utløpet q_2 og p_2 . Vi betrakter systemet med pådrag q_1 og måling p_1 . Det antas at det ikke er noe aktivt element som f.eks. en pumpe eller en kompressor i systemet.



Figur 5.46: Rørledning med volumstrøm q_1 og trykk p_1 ved innløp og volumstrøm q_2 og trykk p_2 ved utløp

5.21.1 Energibetraktning

Vi betegner totalenergien til systemet V . Totalenergien vil være summen av kinetisk og potensiell energi i systemet. Tilført effekt fra pådraget er trykk ganger volumstrøm som er $q_1 p_1$. Energibalansen kan dermed skrives

$$\dot{V} = q_1 p_1 - g \quad (5.314)$$

hvor g representerer effekttap i systemet. Under antagelsen at det ikke er noe aktivt element i systemet er

$$\int_0^T g(t)dt \geq 0 \quad \text{for alle } T \geq 0 \quad (5.315)$$

Dette betyr at systemet med pådrag q_1 og måling p_1 som vist i figur 5.47 på blokkdiagramform er passivt. Det følger derav at

$$\left| \angle \frac{p_1}{q_1}(j\omega) \right| \leq 90^\circ \quad (5.316)$$

for alle ω .



Figur 5.47: *Transmisjonslinje som dynamisk prosess med inngang q_1 og utgang p_1*

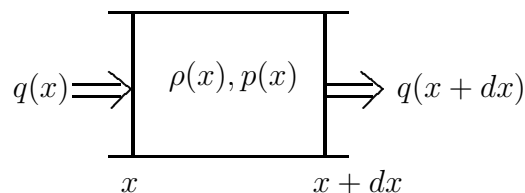
5.21.2 Dynamisk modell

En dynamisk modell for trykket i røret finnes ved å sette opp massebalansen og impulsbalansen for oljen for et volumelement $A dx$ hvor x er koordinaten langs røret. For enkelhets skyld antas røret å være tapsfritt hvilket vil si at man ser bort fra friksjonskrefter og lekkasje. Tettheten betegnes $\rho(x, t)$, volumstrømmen $q(x, t)$ og massestrømmen $w(x, t) = \rho(x, t)q(x, t)$ som vist i figur 5.48 Massebalansen er

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \rho(x) A dx &= w(x) - w(x + dx) \\ &= \rho(x)q(x) - \rho(x + dx)q(x + dx) \\ &= -\frac{\partial(\rho q)}{\partial x} dx \end{aligned}$$

som gir

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{1}{A} \frac{\partial(\rho q)}{\partial x} \quad (5.317)$$



Figur 5.48: *Volumelement*

Vi innfører så lydhastigheten

$$c = \sqrt{\frac{\beta}{\rho}} \quad (5.318)$$

og den karakteristiske impedans

$$z_0 = \frac{\rho c}{A} \quad (5.319)$$

Ved å sette inn $d\rho = (\rho/\beta)dp$ fås

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -cz_0 \frac{\partial q}{\partial x} - \frac{q}{A} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (5.320)$$

Impulsbalansen er

$$\frac{\partial[\rho(x)q(x)]}{\partial t} dx = p(x)A - p(x+dx)A + \frac{1}{A}[\rho(x)q^2(x) - \rho(x+dx)q^2(x+dx)] \quad (5.321)$$

Dette gir

$$q \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial q}{\partial t} = -A \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{q}{A} \frac{\partial(\rho q)}{\partial x} - \frac{\rho q}{A} \frac{\partial q}{\partial x} \quad (5.322)$$

Innsetting av c , z_0 og massebalansen (5.317) gir

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{q}{A} \frac{\partial q}{\partial x} = -\frac{c}{z_0} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (5.323)$$

Omkring null hastighet, dvs. omkring $q = 0$ kan masse og impulsbalanse tilnærmes med [7, s. 321]

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -cz_0 \frac{\partial q}{\partial x} \quad \text{og} \quad \frac{\partial q}{\partial t} = -\frac{c}{z_0} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (5.324)$$

Ved å kombinere masse- og impulsbalanse fås bølgeligningen

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0 \quad (5.325)$$

Laplacetransformasjon gir

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \frac{s^2}{c^2} p = 0 \quad (5.326)$$

som har løsning

$$p(x, s) = C_1 \exp \frac{Tsx}{\ell} + C_2 \exp \frac{-Tsx}{L} \quad (5.327)$$

hvor

$$T = \frac{\ell}{c} = \frac{1}{z_0} \frac{\ell \rho}{A} = \ell \sqrt{\frac{\rho}{\beta}} \quad (5.328)$$

er bølgeforplantningstiden langs røret. Videre er

$$q(x, s) = -\frac{1}{z_0} [C_1 \exp \frac{Tsx}{\ell} - C_2 \exp \frac{-Tsx}{\ell}] \quad (5.329)$$

siden

$$q(x, s) = -\frac{c}{sz_0} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (5.330)$$

Konstantene C_1 og C_2 finnes ved $x = 0$ av $p_1 = C_1 + C_2$ og $q_1 = -(C_1 - C_2)/z_0$ som gir

$$C_1 = \frac{1}{2}(p_1 - z_0 q_1) \quad \text{og} \quad C_2 = \frac{1}{2}(p_1 + z_0 q_1) \quad (5.331)$$

Ved $x = \ell$ fås

$$q_2(s) = \cosh(Ts)q_1(s) - \frac{1}{z_0} \sinh(Ts)p_1(s) \quad (5.332)$$

$$p_2(s) = -z_0 \sinh(Ts)q_1(s) + \cosh(Ts)p_1(s) \quad (5.333)$$

5.21.3 Transferfunksjon

Anta at røret er koblet til et lineært passivt system med impedans $z_L(s)$ i betydningen

$$p_2(s) = z_L(s)q_2(s) \quad (5.334)$$

Da er

$$\frac{p_1(s)}{q_1(s)} = z_0 \frac{z_L(s) \cosh(Ts) + z_0 \sinh(Ts)}{z_0 \cosh(Ts) + z_L(s) \sinh(Ts)} \quad (5.335)$$

Spredningsrepresentasjonen finnes ved å sette $a_i = p_i + z_0 q_i$ og $b = p_i - z_0 q_i$ for $i \in \{1, 2\}$. Med belastningsimpedansen z_L blir som for elektriske transmisjonslinjer spredningsfunksjonen fra a_1 til b_1 lik

$$g_1(s) = \frac{b_1}{a_1}(s) = \exp(-2Ts)g_L(s) \quad (5.336)$$

hvor

$$g_L(s) = \frac{\frac{z_L(s)}{z_0} - 1}{\frac{z_L(s)}{z_0} + 1} \quad (5.337)$$

er spredningsfunksjonen til impedansen $z_L(s)/z_0$. Som for elektriske transmisjonslinjer ser vi at $g_1(s)$ er begrenset positiv for alle passive $z_L(s)$, og det følger at prosessen med pådrag q_1 og måling p_1 er passiv for alle passive $z_L(s)$.

Vi betrakter følgende spesialtilfeller:

1. Anta at impedanstilpasning benyttes slik at $z_L = z_0$. Da er transferfunksjonen

$$\frac{p_1}{q_1}(s) = z_0 \quad (5.338)$$

mens spredningsfunksjonen er

$$g_1(s) = 0 \quad (5.339)$$

Her absorberes innkommende bølge i belastningsimpedansen.

2. Vi antar så at $q_2 = 0$ hvilket betyr at røret er stengt ved $x = \ell$. Da er $z_L = \infty$, og transferfunksjonen er

$$\frac{p_1}{q_1}(s) = \frac{z_0}{\tanh(Ts)} \quad (5.340)$$

mens spredningsfunksjonen er

$$g_1(s) = \exp(-2Ts) \quad (5.341)$$

hvilket betyr at innkommende bølge reflekteres.

3. Til slutt antar vi at $p_2 = 0$ hvilket betyr at oljen kan strømme fritt gjennom utløpet. Da er $z_L = 0$ og transferfunksjonen er

$$\frac{p_1}{q_1}(s) = z_0 \tanh(Ts) \quad (5.342)$$

mens spredningsfunksjonen er

$$g_1(s) = -\exp(-2Ts) \quad (5.343)$$

hvilket betyr at innkommende bølge reflekteres med fortegnsskift.

5.21.4 Energitap i transmisjonslinjen

Viskøs friksjon vil for dette systemet ha en innvirkning på systemet som tilsvarende resistansen r i elektriske transmisjonslinjer. Videre vil lekkasje virke på tilsvarende måte som admittansen g for den elektriske transmisjonslinjen. Systemet vil fortsatt ha de samme passivitetsegenskapene siden friksjon og lekkasje gir tap av effekt. Videre vil tapsleddene føre til at de bølgevariable blir noe redusert i absoluttverdi gjennom transmisjonslinjen i motsetning til det tapsfrie tilfelle hvor de bølgevariable kun blir tidsforsinket.

5.22 Telemanipulering med kraftrefleksjon

Ved telemanipulering, som er fjernstyring av manipulatorer, benyttes ofte en master/slave løsning hvor operatøren beveger et håndtak festet på en mastermanipulator, og det er en elektromekanisk overføring til slavemanipulatoren. Opprinnelig var overføringen fra master til slave mekanisk ved bruk av stag og wire, og slavens bevegelser var identisk med masteren. Denne type master/slave manipulatorer ble brukt for å håndtere radioaktivt materiale og i laboratorieforsøk hvor den menneskelige operatøren ikke måtte komme i kontakt med prøver, enten av hensyn til operatørens helse eller til prøvens kvalitet. Ved denne oppkoblingen vil operatøren kjenne kontaktkrefter i masteren når slaven støter borti en gjenstand som f.eks. en bordkant eller et objekt som skal gripes. Dette skjer ved at kontaktkraften mellom slave og omgivelser overføres til masteren over den mekaniske overføringen. Dette kalles gjerne kraftrefleksjon.

I nyere master/slave-systemer skjer overføringen av posisjons- og hastighetskommandoer fra master til slave og kraftsignaler fra slave til master gjennom en datamaskin, og slaven er drevet av likestrømsmotorer. Dette gir gode muligheter for forbedring i ytelse, men det viser seg at ustabilitet kan oppstå ved kraftrefleksjon hvis tidsforsinkelsen i systemet blir for stor. Dette er et problem allerede ved en tidsforsinkelse på 40 ms.

Dette problemet ble undersøkt i [2] og resultatene her er basert på dette arbeidet. Operatøren som beveger masteren tilfører systemet effekt P som er produktet mellom kraft F_h mellom hånd og master og hastighet v_m av masterens håndtak, dvs. $P = F_h v_m$. Energien som operatøren tilfører systemet i et tidsintervall $[0, T]$ er dermed

$$E = \int_0^T F_h(t) v_m(t) dt \quad (5.344)$$

Operatøren vil forvente at systemet er passivt. I denne sammenheng betyr dette at uansett hvordan operatøren beveger masteren, så vil ikke systemet kunne generere energi internt og returnere dette til operatøren. Derfor må energien $-E$ som systemet overfører til operatøren ikke være større enn initiell energi lagret i systemet. Dette kan uttrykkes ved

$$\int_0^T F_h(t) v_m(t) dt \geq -V(0) \quad (5.345)$$

hvor $V(0)$ betegner initiell energi i systemet.

Passivitet er alltid sikret når en mekanisk overføring blir benyttet siden slaven i dette tilfelle blir drevet av muskelkraften til operatøren, og det er ingen interne energikilder i systemet. I nyere systemer er det imidlertid motorer i slaven, og det avhenger av regulatoralgoritmene om systemet kan generere energi internt.

Vi skal i det følgende kun se på translasjon i en retning. Masteren har masse m_m , og kraften fra overføringen på masteren betegnes F_m . Newtons lov for masteren blir

$$m_m \dot{v}_m = F_h - F_m \quad (5.346)$$

Slaven har masse m_s og hastighet v_s , kraften fra overføringen på slaven betegnes F_s , og kontaktkraften fra omgivelsene på slaven betegnes F_e . Dette gir

$$m_s \dot{v}_s = F_s - F_e \quad (5.347)$$

Ved en ren mekanisk overføring er

$$F_s = F_m \quad \text{og} \quad v_s = v_m \quad (5.348)$$

og dermed

$$(m_m + m_s) \dot{v}_m = F_h - F_e \quad (5.349)$$

og operatøren kjenner kontaktkraften F_e mellom slaven og omgivelsene.

Vi skal så se på tilfellet hvor slaven er drevet av en likestrømsmotor med elektronisk overføring av hastighetsreferansen v_0 og posisjonsreferansen x_0 til slaven, og av kraftsignal F_m til masteren.

Hvis det ikke er tidsforsinkelse, kan man benytte masterens hastighet og posisjon som referanse til slaven slik at

$$v_0(t) = v_m(t) \quad (5.350)$$

En PD-regulator benyttes for styring av slavens motorer:

$$F_s = K_s(x_0 - x_s) + D_s(v_0 - v_s) \quad (5.351)$$

Kraftrefleksjon oppnås ved å sette opp et motormoment F_m i masteren som er likt kraftpådraget F_s i slaven:

$$F_m(t) = F_s(t) \quad (5.352)$$

Dette systemet er passivt med en mekanisk ekvivalent som vist i figur 5.49 hvor overføringen mellom master og slave er en fjær med fjærkonstant K i parallell med en demper med dempekoeffisient D .

Vi antar så at det er en tidsforsinkelse τ i overføringen. Det er blitt forsøkt å bruke

$$v_0(t) = v_m(t - \tau) \quad (5.353)$$

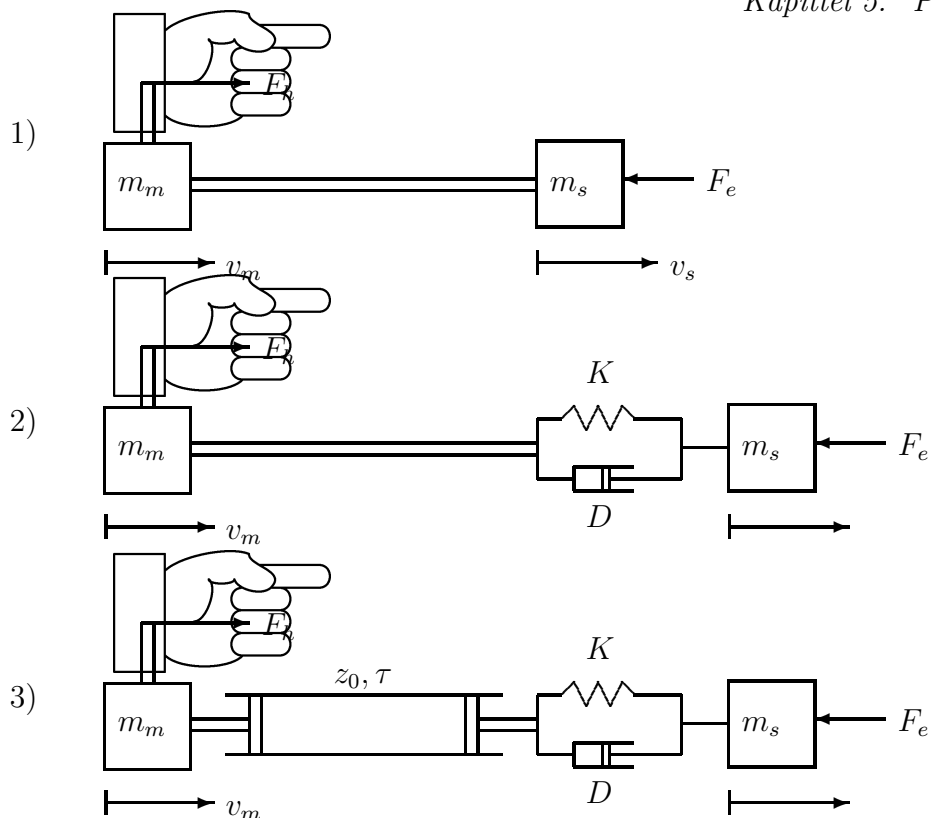
og en PD-regulator

$$F_s = K_s(x_0 - x_s) + D_s(v_0 - v_s) \quad (5.354)$$

og kreftrefleksjon ved

$$F_m(t) = F_s(t - \tau) \quad (5.355)$$

Dette er den samme reguleringsstrukturen som det man benytter uten tidsforsinkelse, bortsett fra at hastighets- og posisjonsreferansen blir forsinket i overføringen fra master til slave, mens den reflekterte kraften blir forsinket i overføringen tilbake fra slave til master. Det resulterende systemet er ikke passivt. Vi skal ikke vise dette i detalj her, men det kan forstås ut fra at det ikke fins noen passiv mekanisk toport som gir en ren tidsforsinkelse i overføring av kraft og hastighet, på samme måte som det ikke fins noen passiv elektrisk toport som gir en ren tidsforsinkelse av strøm og spenning.



Figur 5.49: Mekaniske ekvivalenter for telemanipulering med kraftrefleksjon fra slave til master. I 1) er overføringen mekanisk, og operatøren kan kjenne reaksjonskrefter på slaven i håndtaket. I 2) er en mekanisk ekvivalent vist for et system hvor signalene overføres via en datamaskin uten tidsforsinkelse. Slaven drives av likestrømsmotorer som er styrt med PD-regulatorer. Også her oppnås kraftrefleksjon fra slave til operatør. I 3) er en mekanisk ekvivalent vist for et system med overføring av signaler via en datamaskin med en tidsforsinkelse lik τ . Løsningen oppnås ved at bølgevariable overføres. Den mekaniske ekvivalenten består av en hydraulisk transmisjonslinje med karakteristisk impedans z_0 og bølgeforplantningstid τ i serie med en mekanisk ekvivalent for en PD-regulator. Kraftrefleksjon oppnås også for dette systemet.

Imidlertid fins det en passiv mekanisk toport som overfører bølgevariable som en ren tidsforsinkelse τ , nemlig en tapsfri transmisjonslinje. I [2] ble det derfor foreslått å innføre bølgevariable

$$a_m = F_m + z_0 v_m \quad \text{og} \quad b_m = F_m - z_0 v_m \quad (5.356)$$

for master-siden og

$$a_s = F_s - z_0 v_0 \quad \text{og} \quad b_s = F_s + z_0 v_0 \quad (5.357)$$

for slave-siden hvor $z_0 \in \mathbb{R}$ er karakteristisk impedans for transmisjonslinjen. Ligningene for transmisjonslinjen er gitt av (5.297) og (5.298) som her gir

$$b_s(s) = e^{-\tau s} a_m(s) \quad \text{og} \quad b_m(s) = e^{-\tau s} a_s(s) \quad (5.358)$$

Dette gir

$$b_s(t) = a_m(t - \tau) \Rightarrow F_s(t) + z_0 v_0(t) = F_m(t - \tau) + z_0 v_m(t - \tau) \quad (5.359)$$

$$b_m(t) = a_s(t - \tau) \Rightarrow F_m(t) - z_0 v_m(t) = F_s(t - \tau) - z_0 v_0(t - \tau) \quad (5.360)$$

Vi kan dermed oppnå passivitet ved å benytte overføringen

$$v_0(t) = v_m(t - \tau) + \frac{1}{z_0}[F_m(t - \tau) - F_s(t)] \quad (5.361)$$

av referansen sammen med en PD-regulator

$$F_s = K_s(x_0 - x_s) + D_s(v_0 - v_s) \quad (5.362)$$

mens kraftrefleksjon oppnås med

$$F_m(t) = F_s(t - \tau) + z_0[v_m(t) - v_0(t - \tau)] \quad (5.363)$$

Denne løsningen er passiv, og den mekaniske ekvivalenten har en transmisjonslinje som kan tenkes å være en hydraulisk transmisjonslinje med et kompressibelt fluid som vist i figur 5.49.

5.23 Streng positiv reell*

I reguleringsteknisk litteratur er begrepet **streng positiv reell** mye brukt. Det er presentert en rekke definisjoner for dette begrepet ved bruk av frekvensrespons, transferfunksjon og tilstandsromformuleringer. Her presenteres de vanligste definisjonene og sammenhengen med passivitet og streng passivitet.

Gitt et lineært tidsinvariant system Σ som representeres med en styrbar og observerbar tilstandsrommodell

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \quad (5.364)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \quad (5.365)$$

og en transferfunksjonsmodell

$$\mathbf{y}(s) = \mathbf{H}(s)\mathbf{u}(s) \quad (5.366)$$

$$\mathbf{H}(s) = \mathbf{D} + \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} \quad (5.367)$$

hvor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ og $\mathbf{u}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$. ($\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}$) kalles interne parametere for Σ . Vi antar at 1) $\mathcal{N}(\mathbf{B}) = \{0\}$ hvor $\mathcal{N}(\mathbf{B})$ er nullrommet til \mathbf{B} , eller 2) $m < n$ og \mathbf{B} har full rang. Dette er ekvivalent med at minste singularverdi for \mathbf{B} er større enn null. De følgende ligninger hvor $\mathbf{P} = \mathbf{P}^T > 0$, $\mathbf{P}, \mathbf{L} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\mathbf{W} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ betegnes **Kalman-Yakubovitch ligninger**:

$$\mathbf{A}^T\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A} = -\mathbf{Q}^T\mathbf{Q} - \mathbf{L} \quad (5.368)$$

$$\mathbf{B}^T\mathbf{P} - \mathbf{C} = \mathbf{W}^T\mathbf{Q} \quad (5.369)$$

$$\mathbf{W}^T\mathbf{W} = \mathbf{D} + \mathbf{D}^T \quad (5.370)$$

Vi definerer videre et system Σ_T som har interne parametere ($\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{Q}, \mathbf{W}$) og transferfunksjon

$$\mathbf{T}(s) = \mathbf{W} + \mathbf{Q}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} \quad (5.371)$$

Vi skal nå presentere en rekke utsagn for systemet Σ og sette opp implikasjoner og eventuell ekvivalens mellom utsagnene. Utsagnene er presentert for multivariable systemer, men utsagn formulert ved frekvensresponsen kan omformuleres til monovariabel form ved å sette

$$\mathbf{H}(j\omega) + \mathbf{H}^*(j\omega) = 2\text{Re}[h(j\omega)] \quad (5.372)$$

1. **Streng passivitet:** Det fins en positiv konstant δ og en konstant $\beta(\mathbf{x}_0)$ hvor $\beta(\mathbf{0}) = 0$ slik at for alle $T \geq 0$ og alle \mathbf{u}

$$\int_0^T \mathbf{u}^T(t)\mathbf{y}(t)dt \geq \beta(\mathbf{x}_0) + \delta \int_0^T \mathbf{u}^T(t)\mathbf{u}(t)dt \quad (5.373)$$

2. **Streng positiv reell:** Det fins en $\mu > 0$ slik at for alle ω

$$\mathbf{H}(j\omega - \mu) + \mathbf{H}^*(j\omega - \mu) \geq 0 \quad (5.374)$$

3. **(Svakt) streng positiv reell:** For alle ω

$$\mathbf{H}(j\omega) + \mathbf{H}^*(j\omega) > 0 \quad (5.375)$$

4. **Passivitet:** Det fins en konstant $\beta(\mathbf{x}_0)$ hvor $\beta(\mathbf{0}) = 0$ slik at for alle $T \geq 0$ og alle \mathbf{u}

$$\int_0^T \mathbf{u}^T(t)\mathbf{y}(t)dt \geq \beta(\mathbf{x}_0) \quad (5.376)$$

5. Det eksisterer en $\delta > 0$ slik at for alle ω

$$\mathbf{H}(j\omega) + \mathbf{H}^*(j\omega) \geq \delta \mathbf{I} \quad (5.377)$$

6. For alle ω

$$\mathbf{H}(j\omega) + \mathbf{H}^*(j\omega) > 0 \quad (5.378)$$

og

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \omega^2 [\mathbf{H}(j\omega) + \mathbf{H}^*(j\omega)] > 0 \quad (5.379)$$

7. Σ oppfyller Kalman-Yakubovitch ligninger med $\mathbf{L} = 2\mu\mathbf{P}$ for en konstant $\mu > 0$.

8. Det fins en \mathbf{Q} som oppfyller betingelsen (\mathbf{A}, \mathbf{Q}) er observerbar⁶ slik at Σ oppfyller Kalman-Yakubovitch ligninger med $\mathbf{L} = \mathbf{0}$.

9. Σ oppfyller Kalman-Yakubovitch ligninger med $\mathbf{L} = \mathbf{0}$.

10. For alle ω

$$\mathbf{H}(j\omega) + \mathbf{H}^*(j\omega) \geq 0 \quad (5.380)$$

11. Det fins en $\mu > 0$ slik at Kalman-Yakubovitch ligninger med $\mathbf{L} = \mathbf{0}$ er oppfylt for et system med interne parametere $(\mathbf{A} + \mu\mathbf{I}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D})$ som tilsvarer en transferfunksjonsmatrise $\mathbf{H}(j\omega - \mu)$.

12. Det fins en positiv konstant γ og en konstant $\beta(\mathbf{x}_0)$ hvor $\beta(\mathbf{0}) = 0$ slik at for alle $T \geq 0$ og alle \mathbf{u}

$$\int_0^T e^{\gamma t} \mathbf{u}^T(t)\mathbf{y}(t)dt \geq \beta(\mathbf{x}_0) \quad (5.381)$$

13. Systemet Σ beskriver en passiv elektrisk m -port hvor y_i er spenning over terminal i og u_i er strøm inn på terminal i , hvor m -porten består av spoler, kondensatorer og motstander.

⁶ (\mathbf{A}, \mathbf{Q}) er observerbar betyr at prosessen $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$ med målingen $\boldsymbol{\eta}(t) = \mathbf{Q}\mathbf{x}(t)$ er observerbar.

14. Systemet Σ beskriver en passiv elektrisk m -port hvor y_i er spenning over terminal i og u_i er strøm inn på terminal i , hvor m -porten består av spoler, kondensatorer og motstander og ingen kondensatorer eller spoler er tapsfrie, dvs. alle kondensatorer er i parallell med en motstand og alle spoler er i serie med en motstand.

Da oppfyller utsagnene

$$\begin{aligned}
 & 1 \Leftrightarrow 5 \\
 & \quad \Downarrow \\
 & 2 \Leftrightarrow 6 \Leftrightarrow 7 \Leftrightarrow 11 \Leftrightarrow 12 \Leftrightarrow 14 \\
 & \quad \Downarrow \\
 & 3 \Leftrightarrow 8 \\
 & \quad \Downarrow \\
 & 4 \Leftrightarrow 9 \Leftrightarrow 10 \Leftrightarrow 13
 \end{aligned}$$

Vi skal her vise noen av implikasjonene. De øvrige er vist i [41] og [40] Først gjør vi følgende utregning:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{H}(j\omega) + \mathbf{H}^*(j\omega) &= \mathbf{D} + \mathbf{D}^T + \mathbf{C}(j\omega\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{B}^T(-j\omega\mathbf{I} - \mathbf{A}^T)^{-1}\mathbf{C}^T \\
 &= \mathbf{W}^T\mathbf{W} + (\mathbf{B}^T\mathbf{P} - \mathbf{W}^T\mathbf{Q})(j\omega\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} \\
 &\quad + \mathbf{B}^T(-j\omega\mathbf{I} - \mathbf{A}^T)^{-1}(\mathbf{P}\mathbf{B} - \mathbf{Q}^T\mathbf{W}) \\
 &= \mathbf{W}^T\mathbf{W} + \mathbf{B}^T(-j\omega\mathbf{I} - \mathbf{A}^T)^{-1}[(-j\omega\mathbf{I} - \mathbf{A}^T)\mathbf{P} \\
 &\quad + \mathbf{P}(j\omega\mathbf{I} - \mathbf{A})](j\omega\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} \\
 &\quad - \mathbf{W}^T\mathbf{Q}(j\omega\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} - \mathbf{B}^T(-j\omega\mathbf{I} - \mathbf{A}^T)^{-1}\mathbf{Q}^T\mathbf{W} \\
 &= \mathbf{W}^T\mathbf{W} \\
 &\quad + \mathbf{B}^T(-j\omega\mathbf{I} - \mathbf{A}^T)^{-1}(\mathbf{Q}^T\mathbf{Q} + \mathbf{L})(j\omega\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} \\
 &\quad - \mathbf{W}^T\mathbf{Q}(j\omega\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} - \mathbf{B}^T(-j\omega\mathbf{I} - \mathbf{A}^T)^{-1}\mathbf{Q}^T\mathbf{W} \\
 &= [\mathbf{W}^T - \mathbf{B}^T(-j\omega\mathbf{I} - \mathbf{A}^T)^{-1}\mathbf{Q}^T][\mathbf{W} - \mathbf{Q}(j\omega\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}] \\
 &\quad + \mathbf{B}^T(-j\omega\mathbf{I} - \mathbf{A}^T)^{-1}\mathbf{L}(j\omega\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} \\
 &= \mathbf{T}^*(j\omega)\mathbf{T}(j\omega) \\
 &\quad + \mathbf{B}^T(-j\omega\mathbf{I} - \mathbf{A}^T)^{-1}\mathbf{L}(j\omega\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} \tag{5.382}
 \end{aligned}$$

Vi finner da:

- $9 \Rightarrow 10$: Hvis $\mathbf{L} = \mathbf{0}$, så gir (5.382) $\mathbf{H}(j\omega) + \mathbf{H}^*(j\omega) = \mathbf{T}^*(j\omega)\mathbf{T}(j\omega)$. Siden enhver matrise av formen $\mathbf{M}^*\mathbf{M}$ er positiv semidefinit hermitisk⁷ impliserer dette at $\mathbf{H}^*(j\omega) + \mathbf{H}(j\omega) \geq 0$.
- $8 \Rightarrow 3$: Det er antatt at Σ er styrbar, hvilket vil si at (\mathbf{A}, \mathbf{B}) er styrbar. Hvis (\mathbf{A}, \mathbf{Q}) er observerbar, så er Σ_T styrbar og observerbar, og dermed har $\mathbf{T}(j\omega)$ som gitt av (5.371) full rang for alle ω . Dette impliserer at $\mathbf{T}(j\omega)^*\mathbf{T}(j\omega) > 0$ for alle ω . Siden $\mathbf{L} = \mathbf{0}$ er dermed $\mathbf{H}^*(j\omega) + \mathbf{H}(j\omega) > 0$ for alle ω .

⁷ $\mathbf{N} \in \mathbb{C}^{m \times m}$ er positiv semidefinit hermitisk hvis $\mathbf{v}^*\mathbf{N}\mathbf{v} \geq 0$ for alle $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^m$, og vi skriver $\mathbf{N} \geq 0$.

- $7 \Rightarrow 2$: Hvis $\mathbf{L} = 2\mu\mathbf{P}$, så finner vi at

$$\mathbf{A}^T\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A} = -\mathbf{Q}^T\mathbf{Q} - \mathbf{L} \quad (5.383)$$

\Downarrow

$$(\mathbf{A} - \mu\mathbf{I})^T\mathbf{P} + \mathbf{P}(\mathbf{A} - \mu\mathbf{I}) = -\mathbf{Q}^T\mathbf{Q} \quad (5.384)$$

Vi definerer systemet Σ_μ med interne parametere $(\mathbf{A} - \mu\mathbf{I}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D})$. Σ_μ har da transferfunksjonsmatrisen

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(s) &= \mathbf{D} + \mathbf{C}[s\mathbf{I} - (\mathbf{A} - \mu\mathbf{I})]^{-1}\mathbf{B} \\ &= \mathbf{D} + \mathbf{C}[(s - \mu)\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1}\mathbf{B} \\ &= \mathbf{H}(s - \mu) \end{aligned} \quad (5.385)$$

Vi ser fra (5.384) at Σ_μ oppfyller utsagn 9. Dette impliserer at Σ_μ oppfyller utsagn 10. Siden $\mathbf{H}(s) = \mathbf{H}(s - \mu)$ er dermed $\mathbf{H}^*(j\omega - \mu) + \mathbf{H}(j\omega - \mu) \geq 0$ for alle ω .

- Bevis for at frekvenskriteriene impliserer Kalman-Yakubovitch ligninger er grovt sett basert på at enhver positiv reell transferfunksjon $\mathbf{H}(s)$ har en spektral faktorisering

$$\mathbf{H}^T(-s) + \mathbf{H}(s) = \mathbf{G}^T(-s)\mathbf{G}(s) \quad (5.386)$$

som på $j\omega$ -aksen har formen

$$\mathbf{H}^*(j\omega) + \mathbf{H}(j\omega) = \mathbf{G}^*(j\omega)\mathbf{G}(j\omega) \quad (5.387)$$

Som eksempel på dette har vi at hvis vi setter $\mathbf{L} = \mathbf{0}$, så er $\mathbf{G}(s) = \mathbf{T}(s)$ en mulig faktorisering. Man kan så vise at en styrbar og observerbar representasjon av $\mathbf{G}(s)$ på tilstandsromform tilfredsstiller ligninger som kan transformeres over til Kalman-Yakubovitch ligninger.

Kapittel 6

Passivitet for ulineære systemer

6.1 Vektorromformulering

Teorien om passive systemer er meget nyttig i analyse av en viktig klasse ulineære systemer. For ulineære systemer kan man ikke bruke frekvensanalyse som er det viktigste analyseverktøy for tidsinvariante lineære systemer. I stedet kan man basere seg på en vektorromformulering ved bruk av funksjonsrommet L_2 . En innføring i den nødvendige teori for dette er presentert i det følgende. Dette stoffet er basert på [9, 40]. God støttelitteratur finnes også i f.eks. [27]. Vi skal her betrakte indreproduktrommet L_2 som består av reelle funksjoner $x(t)$, $t \in [0, \infty)$, som er slik at integralet

$$\int_0^\infty x^2(t)dt \triangleq \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T x^2(t)dt$$

eksisterer. Dette kan uttrykkes

$$L_2 = \{x \mid \int_0^\infty x^2(t)dt \leq M \text{ for en } M < \infty\} \quad (6.1)$$

Indreproduktet av to funksjoner $x, y \in L_2$ er

$$\langle x, y \rangle = \int_0^\infty x(t)y(t)dt \quad (6.2)$$

mens normen av x er

$$\|x\| = \langle x, x \rangle^{\frac{1}{2}} = [\int_0^\infty x^2(t)dt]^{\frac{1}{2}} \quad (6.3)$$

Av dette fremgår det at hvis $\|x\|$ eksisterer, så er $x \in L_2$.

Eksempel 6.1 Gitt signalet

$$x(t) = e^{-t} \quad (6.4)$$

Normen er

$$\|x\| = [\int_0^\infty e^{-2t}dt]^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2} \quad (6.5)$$

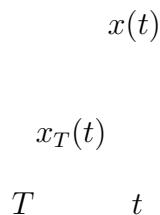
Dette betyr at $x \in L_2$. ■

Ustabile prosesser kan ikke beskrives i L_2 siden utgangen på et ustabilt system ikke har en norm definert i L_2 . Det er derfor behov for å definere en utvidelse av L_2 slik at også signaler som går til uendelig kan beskrives.

Vi introduserer den avkortede funksjonen

$$x_T(t) = \begin{cases} x(t) & \text{hvis } t \leq T \\ 0 & \text{ellers} \end{cases} \quad (6.6)$$

som er lik $x(t)$ for alle t mindre eller lik T , og deretter lik null. Et eksempel på en avkortet funksjon er vist i fig. 6.1.



Figur 6.1: En funksjon $x(t)$ og den avkortede funksjonen $x_T(t)$

Det er klart at

$$\|x_T\| = \left[\int_0^\infty x_T^2(t) dt \right]^{\frac{1}{2}} = \left[\int_0^T x^2(t) dt \right]^{\frac{1}{2}} \leq \left[\int_0^\infty x^2(t) dt \right]^{\frac{1}{2}} = \|x\|$$

hvilket impliserer at

$$\|x_T\| \leq \|x\|$$

Dette betyr at $x \in L_2 \Rightarrow x_T \in L_2$ for alle $T \geq 0$.

Vi kan nå introdusere en utvidelse av rommet L_2 som betegnes L_{2e} . Dette er rommet av alle funksjoner som er slik at den avkortede funksjonen ligger i L_2 , dvs.

$$L_{2e} = \{x | x_T \in L_2 \text{ for alle } T \geq 0\} \quad (6.7)$$

Kommentar 6.1 Det utvidede rommet L_{2e} er et lineært rom som inneholder rommet L_2 som en delmengde. L_2 er et normert rom og i tillegg et indreproduktrom, mens L_{2e} er bare et lineært vektorrom som ikke kan gjøres normert ([40] s. 275). ■

Eksempel 6.2 Funksjonen

$$x(t) = e^t \quad (6.8)$$

er gitt. Den avkortede funksjonen x_T har normen

$$\|x_T\| = \left[\int_0^\infty x_T^2(t) dt \right]^{\frac{1}{2}} = \left[\int_0^T e^{2t} dt \right]^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2}(e^{2T} - 1)} \quad (6.9)$$

som er endelig for hver T . Videre er det klart at

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \|x_T\| = \infty \quad (6.10)$$

Dette betyr at $x \in L_{2e}$, mens $x \notin L_2$. ■

Ifølge Schwarz ulikhet [20] er

$$|\langle x_T, y_T \rangle| \leq \|x_T\| \|y_T\| \quad (6.11)$$

hvilket betyr at hvis $x, y \in L_{2e}$, så eksisterer $\langle x_T, y_T \rangle$. Videre er det greit å vise at

1. $\|x_T\|$ er en monotont voksende funksjon av T .

Dette vises som følger: Anta at $T_1 \leq T_2$. Da er

$$\begin{aligned} \|x_{T_2}\|^2 &= \int_0^{T_2} x^2(t) dt \\ &= \int_0^{T_1} x^2(t) dt + \int_{T_1}^{T_2} x^2(t) dt \\ &= \|x_{T_1}\|^2 + \int_{T_1}^{T_2} x^2(t) dt \\ &\geq \|x_{T_1}\|^2 \end{aligned}$$

2. Hvis $\lim_{T \rightarrow \infty} \|x_T\|$ eksisterer, så er $x \in L_2$ og grenseverdien er $\|x\|$.

Dette følger av definisjonen på $\int_0^\infty (\cdot) dt$:

$$\|x\| = \left[\int_0^\infty x^2(t) dt \right]^{\frac{1}{2}} \triangleq \left[\lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T x^2(t) dt \right]^{\frac{1}{2}} = \lim_{T \rightarrow \infty} \|x_T\|$$

3. For alle $x, y \in L_{2e}$ defineres $\langle x, y \rangle_T$ ved

$$\langle x, y \rangle_T = \langle x_T, y_T \rangle = \langle x, y_T \rangle = \langle x_T, y \rangle$$

Dette følger direkte av definisjonen på indreproduktet og avkortede funksjoner.

Eksempel 6.3 Parsevals teorem kan skrives

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x(j\omega) y^*(j\omega) d\omega \quad (6.12)$$

for reelle signaler $x, y \in L_2$ hvor $x(t)$ og $y(t)$ er null for $t < 0$. For normen av x gjelder

$$\|x\|^2 = \langle x, x \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |x(j\omega)|^2 d\omega \quad (6.13)$$

som fremkommer ved å sette $x = y$.

For reelle signaler $x_T, y \in L_2$ gjelder

$$\langle x, y \rangle_T = \langle x_T, y \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x_T(j\omega) y^*(j\omega) d\omega \quad (6.14)$$

Tilsvarende fås ved å sette $y = x_T$ følgende resultat for normen av x_T :

$$\|x_T\|^2 = \langle x_T, x_T \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |x_T(j\omega)|^2 d\omega \quad (6.15)$$

■

Teorem 6.1 Gitt det lineære tidsinvariante systemet $y(s) = h(s)u(s)$ hvor $h(s)$ er proper¹. Da gjelder: $u \in L_2 \Rightarrow y \in L_2$ hvis og bare hvis alle polene til $h(s)$ ligger i det åpne venstre halvplan.

Bevis: Anta $u(t) = 0$ for alle t . Da er $u \in L_2$. Hvis det er en eller flere poler i høyre halvplan, vil $y(t)$ gå til uendelig med passende begynnelsesbetingelser. Hvis alle polene ligger i det åpne venstre halvplan unntatt en pol som ligger i origo, vil $y(t) = c \neq 0$ for passende begynnelsesbetingelser. Hvis det er komplekskonjugerte poler i $s = \pm j\omega_0$, så er $y(t) = \cos \omega_0 t$ for passende begynnelsesbetingelser. I disse tilfellene er $y \notin L_2$, mens $u \in L_2$.

Hvis derimot alle polene ligger i det åpne venstre halvplan, vil (se bevis av teorem A.1)

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt < \infty \quad (6.16)$$

Fouriertransformasjonen

$$h(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-j\omega t} dt \quad (6.17)$$

eksisterer i så fall (se f.eks. [21]), slik at Fouriertransformasjonen til $y(t)$ er $y(j\omega) = h(j\omega)u(j\omega)$. Normen til y oppfyller

$$\|y\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} y(t)^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} y(j\omega)y^*(j\omega) d\omega \quad (6.18)$$

hvor den andre likheten følger av Parsevals teorem. Dermed er

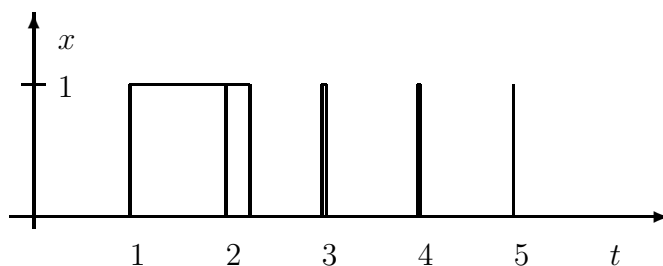
$$\|y\|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |h(j\omega)|^2 |u(j\omega)|^2 d\omega \leq \max_{\omega} [|h(j\omega)|^2] \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |u(j\omega)|^2 d\omega \quad (6.19)$$

og det følger at

$$\|y\| \leq \max_{\omega} [|h(j\omega)|] \|u\| \quad (6.20)$$

Siden $h(s)$ er proper og har alle polene i det åpne venstre halvplan er $|h(j\omega)|$ begrenset. Det følger dermed at $u \in L_2 \Rightarrow y \in L_2$. ■

Et signal som ligger i L_2 trenger ikke nødvendigvis konvergere mot null når t går til uendelig. Et eksempel på dette er:



Figur 6.2: Funksjon som ligger i L_2 , men hvor $x(t)$ ikke konvergerer til null når t går til uendelig

¹Transferfunksjonen $h(s)$ er proper hvis antall poler er større eller lik antall nullpunkt.

Eksempel 6.4 Gitt funksjonen vist i figur 6.2 hvor

$$x(t) = \begin{cases} 1 & \text{hvis } n < t \leq n + \frac{1}{n^2} \\ 0 & \text{ellers} \end{cases} \quad (6.21)$$

for alle positive heltall n . Da er

$$\int_0^\infty x(t)^2 dt = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \quad (6.22)$$

Hvor summen av rekken finnes i [12]. Dette betyr at $x \in L_2$, men $x(t)$ konvergerer ikke når $t \rightarrow \infty$. ■

Ved å innføre ekstra betingelser på signalet x kan vi vise at signalet konvergerer til null. For å vise dette trenger vi følgende lemma som betegnes Barbalats lemma ([30, 35]):

Lemma 6.1 Hvis $f(t)$ er reell og uniformt kontinuert for $t \geq 0$, og hvis grenseverdien

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t f(\tau) d\tau \quad (6.23)$$

eksisterer og er endelig, så er

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = 0 \quad (6.24)$$

Bevis: Anta at $f(t)$ ikke går til null når $t \rightarrow \infty$. Da eksisterer det en uendelig ubegrenset følge $\{t_n\}$ og en $\epsilon > 0$ slik at $|f(t_i)| > \epsilon$ for alle i . Siden f er uniformt kontinuert, så eksisterer det ifølge definisjonen av uniform kontinuitet en konstant k slik at

$$|f(t) - f(t_i)| \leq k|t - t_i|$$

for alle $t \geq 0$, $t_i \geq 0$. Trekantulikheten for reelle tall gir

$$|f(t_i) - f(t)| + |f(t)| \geq |f(t_i)|$$

↓

$$|f(t)| \geq \epsilon - |f(t) - f(t_i)|$$

siden $|f(t_i)| > \epsilon$. Ved å integrere denne ligningen over intervallet $[t_i, t_i + \delta]$ hvor $\delta > 0$, fås

$$\int_{t_i}^{t_i+\delta} |f(\tau)| d\tau \geq \epsilon\delta - k\delta^2/2$$

Ved å velge $\delta = \epsilon/k$ får vi

$$\int_{t_i}^{t_i+\delta} |f(\tau)| d\tau \geq \epsilon\delta/2$$

for alle t_i . Med dette forholdet mellom k og δ kan ikke $f(t)$ skifte fortegn over integrasjonsintervallet, og følgelig er

$$\left| \int_{t_i}^{t_i+\delta} f(\tau) d\tau \right| = \int_{t_i}^{t_i+\delta} |f(\tau)| d\tau \geq \epsilon\delta/2$$

for alle t_i . Dette motsier antagelsen om at $\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t f(\tau) d\tau$ er endelig. ■

Korollar 6.1 Hvis $x \in L_2$ og x og \dot{x} er begrenset, så vil

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$$

Bevis: La $f(t) = x(t)^2$. Da er

$$\dot{f}(t) = 2x(t)\dot{x}(t) < \infty$$

siden x og \dot{x} er begrenset. \dot{f} er derfor begrenset, hvilket impliserer at f er uniformt kontinuert. Siden $x \in L_2$ er grenseverdien i lign. (6.23) lik $\|x\|^2$. Dermed oppfyller $f(t)$ betingelsene i lemma 6.1, og resultatet følger. ■

Korollar 6.2 Hvis $x \in L_2$ og x er uniformt kontinuert, så vil

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$$

Bevis: Anta at x er uniformt kontinuert. Da fins det en konstant $k < \infty$ slik at

$$|x(t_1) - x(t_2)| \leq k|t_1 - t_2| \quad (6.25)$$

for alle t_1, t_2 , og \dot{x} er begrenset siden $|\dot{x}(t)| \leq k$ for alle t . Vi skal nå vise at hvis i tillegg $x \in L_2$, så er også x begrenset. Anta at det fins en T slik at $x(T) \geq M > 0$. Da følger det av (6.25) at

$$x(t) \geq f(t) \triangleq \begin{cases} k(t - T) + M, & t \in [T - \frac{M}{k}, T] \\ -k(t - T) + M, & t \in [T, T + \frac{M}{k}] \\ 0, & \text{ellers} \end{cases} \quad (6.26)$$

Dermed er

$$\|x\|^2 = \int_0^\infty x^2(t) dt \geq \int_0^\infty f^2(t) dt = \frac{2}{3k} M^3 \quad (6.27)$$

og det følger at M må være endelig, som igjen impliserer at x er begrenset. Det følger da av korollar 6.1 at $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$. ■

Påstand 6.1 Anta at $x, \dot{x} \in L_2$. Da er $x(t)$ begrenset og i tillegg gjelder $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$.

Bevis: (Som skissert i [9] s. 186.) Schwarz ulikhet for intervallet $[0, T]$ gir

$$\begin{aligned} \left| \int_0^T x(t)\dot{x}(t) dt \right| &\leq \left(\int_0^T x^2(t) dt \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^T \dot{x}^2(t) dt \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \|x\|_T \|\dot{x}\|_T \\ &\leq \|x\| \|\dot{x}\| \\ &< \infty \end{aligned} \quad (6.28)$$

For et intervall $[t_1, t_2]$ gir Schwarz ulikhet

$$\left| \int_{t_1}^{t_2} x(t)\dot{x}(t) dt \right| \leq \left(\int_{t_1}^{t_2} x^2(t) dt \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{t_1}^{t_2} \dot{x}^2(t) dt \right)^{\frac{1}{2}} \quad (6.29)$$

Siden

$$\left(\int_0^T x^2(t)dt\right)^{\frac{1}{2}} \rightarrow \|x\| \quad \text{og} \quad \left(\int_0^T \dot{x}^2(t)dt\right)^{\frac{1}{2}} \rightarrow \|\dot{x}\|$$

når $T \rightarrow \infty$, følger det at for enhver $\varepsilon > 0$ så fins det en T_ε slik at $T_\varepsilon < t_1 < t_2$ impliserer at $\left(\int_{t_1}^{t_2} x^2(t)dt\right)^{\frac{1}{2}} < \varepsilon$ og $\left(\int_{t_1}^{t_2} \dot{x}^2(t)dt\right)^{\frac{1}{2}} < \varepsilon$, som igjen impliserer at

$$\left|\int_{t_1}^{t_2} x(t)\dot{x}(t)dt\right| < \varepsilon^2$$

Dermed må $\left|\int_{t_1}^{t_2} x(t)\dot{x}(t)dt\right| \rightarrow 0$ når $T_\varepsilon \rightarrow \infty$. Siden

$$\left|\int_{t_1}^{t_2} x(t)\dot{x}(t)dt\right| = \left|\int_{x(t_1)}^{x(t_2)} x dx\right| = \left|\frac{1}{2}[x^2(t_2) - x^2(t_1)]\right| \quad (6.30)$$

følger det at $x^2(t)$ og dermed $x(t)$ konvergerer når $t \rightarrow \infty$. Siden det er antatt at $x \in L_2$, må $x(t)$ konvergere til null.

I tillegg har vi fra (6.29) og (6.30) at

$$\left|\frac{1}{2}[x^2(t_2) - x^2(t_1)]\right| \leq \|x\|\|\dot{x}\| \quad (6.31)$$

for alle $t_1, t_2 \geq 0$ og spesielt for $t_2 \rightarrow \infty$. Dette sammen med $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$ betyr at $x(t_1)$ er begrenset for alle $t_1 \geq 0$. ■

Teorem 6.2* Gitt et lineært, tidsinvariant system $y(s) = h(s)u(s)$ med rasjonell transferfunksjon $h(s)$. Anta at $|h(s)| \rightarrow 0$ når $|s| \rightarrow \infty$. Da gjelder: $h(s)$ har alle polene i det åpne venstre halvplan hvis og bare hvis

$$\int_0^\infty |h(t)|dt < \infty \quad (6.32)$$

Hvis lign. (6.32) er oppfylt, gjelder i tillegg:

$$u \in L_2 \Rightarrow y \in L_2 \cap L_\infty, \dot{y} \in L_2 \quad (6.33)$$

hvor

$$L_\infty = \{x \mid |x(t)| \leq M \text{ for alle } t \text{ og for en } M < \infty\} \quad (6.34)$$

Videre er y kontinuerlig, og $y(t) \rightarrow 0$ når $t \rightarrow \infty$.

Dette er vist i [9]. ■

Ut fra denne terminologien kan en alternativ formulering av definisjonen av passivitet presenteres:

Definisjon 6.1 Et system med inngang $u \in L_{2e}$ og utgang $y \in L_{2e}$ er passivt hvis det eksisterer en konstant β slik at

$$\langle y, u \rangle_T \geq \beta, \quad \forall u \in L_{2e}, \quad \forall T \geq 0 \quad (6.35)$$

og strengt passivt hvis det i tillegg eksisterer en $\delta > 0$ slik at

$$\langle y, u \rangle_T \geq \delta \|u\|_T^2 + \beta, \quad \forall u \in L_{2e}, \quad \forall T \geq 0 \quad (6.36)$$

■

La \mathbf{x} og \mathbf{y} være m -dimensjonale vektorer. I dette tilfelle defineres indreproduktet ved

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \int_0^\infty \mathbf{x}^T(t) \mathbf{y}(t) dt \quad (6.37)$$

og normen ved

$$\|\mathbf{x}\| = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle^{\frac{1}{2}} \quad (6.38)$$

Indreproduktrommet L_2^m defineres ved

$$L_2^m = \{ \mathbf{x} \mid \int_0^\infty \mathbf{x}^T(t) \mathbf{x}(t) dt \leq M \text{ for en } M < \infty \} \quad (6.39)$$

Avkortede funksjoner og det utvidede rommet L_{2e}^m defineres på tilsvarende måte som for monovariabel systemer.

Definisjon 6.2 Et system med pådragsvektor $\mathbf{u}(t) \in L_{2e}^m$ og måling $\mathbf{y}(t) \in L_{2e}^m$ er passivt hvis det eksisterer en konstant β slik at

$$\langle \mathbf{y}, \mathbf{u} \rangle_T \geq \beta, \quad \forall \mathbf{u} \in L_{2e}^m, \quad \forall T \geq 0 \quad (6.40)$$

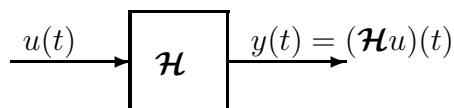
og strengt passivt hvis det i tillegg eksisterer en $\delta > 0$ slik at

$$\langle \mathbf{y}, \mathbf{u} \rangle_T \geq \delta \|\mathbf{u}\|_T^2 + \beta, \quad \forall \mathbf{u} \in L_{2e}^m, \quad \forall T \geq 0 \quad (6.41)$$

■

6.2 Passive operatorer

Vi skal i det følgende benytte en operatorbeskrivelse av dynamiske systemer for å utvikle resultater for påvisning av stabilitet av ulineære systemer ved bruk av passivitet. Vi betegner inngangen til et system med u og utgangen y og antar at $u \in L_{2e}$ og $y \in L_{2e}$. Operatoren $\mathcal{H} : L_{2e} \rightarrow L_{2e}$ beskriver et dynamisk system ved $y = \mathcal{H}u$. Utgangen ved tidspunkt t skrives $y(t) = (\mathcal{H}u)(t)$. Dette er vist i figur 6.3.



Figur 6.3: *Prosess beskrevet med operator \mathcal{H}*

Definisjon 6.3 Operatoren \mathcal{H} sies å være passiv hvis det eksisterer en β slik at

$$\langle u, \mathcal{H}u \rangle_T \geq \beta \quad (6.42)$$

for alle $T \geq 0$ og alle $u \in L_{2e}$. \mathcal{H} er strengt passiv hvis det i tillegg eksisterer en $\delta > 0$

$$\langle u, \mathcal{H}u \rangle_T \geq \delta \|u\|_T^2 + \beta \quad (6.43)$$

for alle $T \geq 0$ og alle $u \in L_{2e}$.

■

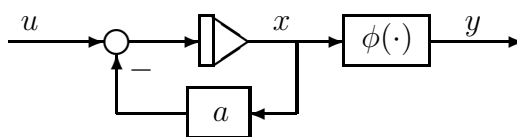
Anta at systemet har tilstandsvektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, og at initialtilstanden er $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$. Da vil operatoren \mathcal{H} avhenge av \mathbf{x}_0 , og iblant skrives $\mathcal{H} = \mathcal{H}(\mathbf{x}_0)$. Utgangen som svarer til initialtilstanden \mathbf{x}_0 og pådragsforløpet u blir da $y = \mathcal{H}(\mathbf{x}_0)u$. Passivitetsulikheten kan da skrives $\langle u, \mathcal{H}(\mathbf{x}_0)u \rangle_T \geq \beta(\mathbf{x}_0)$ siden også β avhenger av \mathbf{x}_0 . Spesielt gjelder det at hvis V er energifunksjonen til systemet som beskrevet i teorem 5.1, og $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ svarer til $V = 0$, så er $\beta(\mathbf{0}) = 0$.

Eksempel 6.5 Gitt prosessen i figur 6.4 hvor

$$\dot{x}(t) = -ax(t) + u(t) \quad (6.44)$$

$$y(t) = \phi[x(t)] \quad (6.45)$$

hvor a er en positiv konstant.

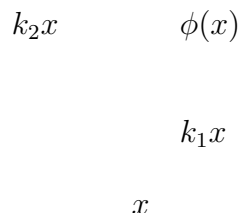


Figur 6.4: Tidskonstant med sektorlinearitet på utgangen

Vi sier at $\phi \in \text{sector}[k_1, k_2]$ hvis

$$k_1 \leq \phi(x)/x \leq k_2 \quad (6.46)$$

hvilket vil si at kurven $\phi(x)$ ligger mellom linjene k_1x og k_2x . Dette er illustrert i figur 6.5. Spesielt sier vi at $\phi \in \text{sector}[0, \infty)$ hvis grafen til $\phi(x)$ ligger kun i første og



Figur 6.5: Sektorlinearitet

tredje kvadrant.

Prosessens gitt ved (6.44) og (6.45) er passiv hvis $\phi \in \text{sector}[0, \infty)$. Dette vises som følger: For alle $T \geq 0$ og for alle $u \in L_{2e}$ er

$$\begin{aligned} \langle y, u \rangle_T &= \langle \phi(x), u \rangle_T \\ &= \langle \phi(x), \dot{x} + ax \rangle_T \\ &= \int_0^T \phi[x(t)]\dot{x}(t)dt + a \int_0^T \phi[x(t)]x(t)dt \end{aligned} \quad (6.47)$$

Siden $\phi \in \text{sector}[0, \infty)$ er $\phi[x(t)]x(t) \geq 0$ for alle $x(t)$. Dermed er det siste integralet i ligningen større eller lik null, og ulikheten

$$\langle y, u \rangle_T \geq \int_0^T \phi[x(t)]\dot{x}(t)dt \quad (6.48)$$

fremkommer. Vi utfører nå et variabelskifte i integralet ved å benytte $\dot{x}(t)dt = dx$, og får

$$\langle y, u \rangle_T \geq \int_{x(0)}^{x(T)} \phi(x)dx = \Phi[x(T)] - \Phi[x(0)] \quad (6.49)$$

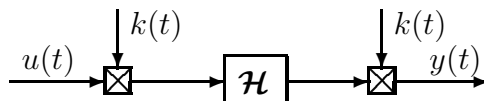
hvor

$$\Phi(\xi) \triangleq \int_0^\xi \phi(x)dx \quad (6.50)$$

Siden $\phi \in \text{sector}[0, \infty)$, så er $\Phi(\xi) \geq 0$ for alle ξ , hvilket betyr at

$$\langle y, u \rangle_T \geq -\Phi[x(0)] \quad (6.51)$$

Systemet er dermed passivt. ■



Figur 6.6: *Prosess med tidsvarierende forsterkning $k(t)$ på inn- og utgang*

Eksempel 6.6 Gitt en operator $\mathcal{H} : L_{2e} \rightarrow L_{2e}$. La $\mathcal{K} : L_{2e} \rightarrow L_{2e}$ være en tidsvarierende forsterkning slik at

$$(\mathcal{K}u)(t) = k(t)u(t) \quad (6.52)$$

hvor $k(t)$ er en begrenset funksjon av t . Operatoren $\mathcal{K}\mathcal{H}\mathcal{K}$ beskriver da prosessen \mathcal{H} med forsterkning $k(t)$ på inn- og utgang som vist i figur 6.6. Her er

$$(\mathcal{K}\mathcal{H}\mathcal{K}u)(t) = k(t)[(\mathcal{H}\mathcal{K}u)(t)] \quad (6.53)$$

Da gjelder:

1. Hvis \mathcal{H} er passiv, så er $\mathcal{K}\mathcal{H}\mathcal{K}$ passiv.
2. Hvis \mathcal{H} er strengt passiv og $|k(t)| \geq \kappa > 0$ for alle t , så er $\mathcal{K}\mathcal{H}\mathcal{K}$ strengt passiv.

Dette vises som følger: Hvis \mathcal{H} er passiv, så fins det en β slik at for alle $T \geq 0$ og alle $u \in L_{2e}$ gjelder

$$\langle u, \mathcal{H}u \rangle_T \geq \beta \quad (6.54)$$

Spesielt må dette gjelde for $u = \mathcal{K}e$ for alle $e \in L_{2e}$. Dermed er

$$\langle \mathcal{K}e, \mathcal{H}\mathcal{K}e \rangle_T \geq \beta \quad (6.55)$$

Nå er

$$\begin{aligned}
 \beta \leq \langle \mathcal{K}e, \mathcal{H}\mathcal{K}e \rangle_T &= \int_0^T k(t)e(t)(\mathcal{H}\mathcal{K}e)(t)dt \\
 &= \int_0^T e(t)k(t)(\mathcal{H}\mathcal{K}e)(t)dt \\
 &= \int_0^T e(t)(\mathcal{K}\mathcal{H}\mathcal{K}e)(t)dt \\
 &= \langle e, \mathcal{K}\mathcal{H}\mathcal{K}e \rangle_T
 \end{aligned} \tag{6.56}$$

og dermed er $\mathcal{K}\mathcal{H}\mathcal{K}$ passiv.

Hvis \mathcal{H} er strengt passiv, så fins det i tillegg en $\delta > 0$ slik at

$$\langle u, \mathcal{H}u \rangle_T \geq \delta \|u\|_T^2 + \beta \tag{6.57}$$

Som over får vi med $u = \mathcal{K}e$

$$\langle \mathcal{K}e, \mathcal{H}\mathcal{K}e \rangle_T \geq \delta \|\mathcal{K}e\|_T^2 + \beta \tag{6.58}$$

og at $\langle \mathcal{K}e, \mathcal{H}\mathcal{K}e \rangle_T = \langle e, \mathcal{K}\mathcal{H}\mathcal{K}e \rangle_T$. Hvis $|k(t)| \geq \kappa > 0$ for alle t , så er

$$\|\mathcal{K}e\|_T^2 = \int_0^T k(t)^2 e(t)^2 dt \geq \kappa^2 \int_0^T e(t)^2 dt = \kappa^2 \|e\|_T^2 \tag{6.59}$$

og dermed har vi

$$\langle e, \mathcal{K}\mathcal{H}\mathcal{K}e \rangle_T \geq \delta' \|e\|_T^2 + \beta \tag{6.60}$$

hvilket betyr at $\mathcal{K}\mathcal{H}\mathcal{K}$ er strengt passiv siden $\delta' = \delta\kappa^2 > 0$. ■

Definisjon 6.4 Operatoren $\mathcal{H} : L_{2e} \rightarrow L_{2e}$ sies å være L_2 -stabil hvis

$$u \in L_2 \Rightarrow \mathcal{H}u \in L_2$$

og det i tillegg eksisterer en γ slik at

$$\|\mathcal{H}u\| \leq \gamma \|u\| \tag{6.61}$$

for alle $u \in L_2$. Den minste γ som oppfyller denne ulikheten betegnes operatorens L_2 -forsterkning. ■

For lineære systemer er L_2 -stabilitet ekvivalent med BIBO-stabilitet [40].

Definisjon 6.5 Operatoren $\mathcal{H} : L_{2e} \rightarrow L_{2e}$ sies å ha endelig forsterkning hvis det eksisterer en endelig konstant γ og en β slik at

$$\|\mathcal{H}u\|_T \leq \gamma \|u\|_T + \beta \tag{6.62}$$

for alle $u \in L_{2e}$ og alle $T \geq 0$. ■

Eksempel 6.7 For et lineært system $y(s) = h(s)u(s)$ med alle polene i det åpne venstre halvplan gir

$$\|y\|_T \leq \gamma \|u\|_T + \beta \quad (6.63)$$

ifølge Parsevals teorem

$$\left[\int_{-\infty}^{\infty} |h(j\omega)|^2 |u_T(j\omega)|^2 d\omega \right]^{\frac{1}{2}} \leq \gamma \left[\int_{-\infty}^{\infty} |u_T(j\omega)|^2 d\omega \right]^{\frac{1}{2}} + 2\pi\beta \quad (6.64)$$

Dette er oppfylt hvis

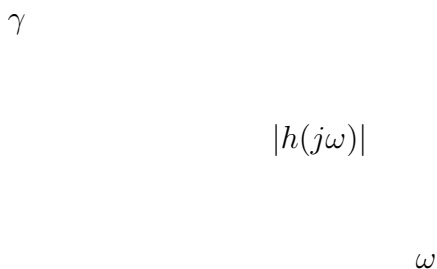
$$|h(j\omega)| \leq \gamma \quad \forall \omega \quad (6.65)$$

for passende $\gamma \geq 0$. Hvis $h(s)$ er proper og alle polene er i det åpne venstre halvplan har alltid $|h(j\omega)|$ en øvre begrensning. L_2 -forsterkningen til systemet, som er den minste mulige verdien for γ , er

$$\gamma = \max_{\omega} [|h(j\omega)|] \quad (6.66)$$

Et eksempel på dette er vist i figur 6.7.

Ser man kun på den stasjonære løsningen, så er $\beta = 0$ og systemet er L_2 -stabilt med forsterkning $\gamma = \max_{\omega} [|h(j\omega)|]$.

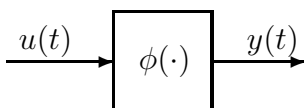


Figur 6.7: Eksempel som viser γ som maksimumsverdien til absoluttverdien til frekvensresponsen

■

Eksempel 6.8 Enkle eksempler på prosesser som er passive, men som ikke har endelig forsterkning er $h_1(s) = s$ hvor $|h_1(j\omega)| = \omega \rightarrow \infty$ når $\omega \rightarrow \infty$, og $h_2(s) = 1/s$ hvor $|h_2(j\omega)| = 1/\omega \rightarrow \infty$ når $\omega \rightarrow 0$.

■



Figur 6.8: Prosess som består av en sektorulinearitet

Eksempel 6.9 En prosess består av kun en sektorlinearitet

$$y(t) = \phi[u(t)], \quad \phi \in \text{sector}[k_1, k_2] \quad (6.67)$$

som vist i figur 6.8, hvor $k_1 < k_2$ oppfyller

$$\langle y, u \rangle_T = \int_0^T u(t)\phi[u(t)]dt \quad (6.68)$$

for alle $T \geq 0$ og alle $u \in L_{2e}$. Siden $u(t)\phi[u(t)] \geq k_1 u(t)^2$ er

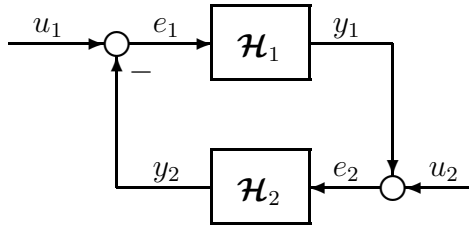
$$\langle y, u \rangle_T \geq k_1 \|u\|_T^2 \quad (6.69)$$

Prosessen er altså passiv hvis $k_1 \geq 0$ og strengt passiv hvis $k_1 > 0$. Dette resultatet gjelder også for $\phi \in \text{sector}[k_1, \infty)$.

Videre oppfyller operatoren $\mathcal{H} : L_{2e} \rightarrow L_{2e}$ definert ved $y = \mathcal{H}u$ og (6.67)

$$\|\mathcal{H}u\|_T = \int_0^T \phi[u(t)]dt \leq k_2 \int_0^T u(t)dt = k_2 \|u\|_T \quad (6.70)$$

hvilket betyr at hvis k_2 er endelig, så har operatoren \mathcal{H} endelig forsterkning, og i tillegg er den L_2 -stabil. ■



Figur 6.9: Tilbakekoblet prosess

Et tilbakekoblet system er vist i figur 6.9 hvor forovergrenden er gitt av en operator $\mathcal{H}_1 : L_{2e} \rightarrow L_{2e}$ og tilbakekoblingsgrenden med en operator $\mathcal{H}_2 : L_{2e} \rightarrow L_{2e}$ slik at

$$e_1 = u_1 - y_2 \quad (6.71)$$

$$e_2 = u_2 + y_1 \quad (6.72)$$

$$y_1 = \mathcal{H}_1 e_1 \quad (6.73)$$

$$y_2 = \mathcal{H}_2 e_2 \quad (6.74)$$

Definisjon 6.6 Gitt systemet (6.71–6.74). Systemet sies å være L_2 -stabilt hvis $u_1, u_2 \in L_2 \Rightarrow y_1, y_2 \in L_2$ og det i tillegg eksisterer en γ slik at

$$\|y_1\|^2 + \|y_2\|^2 \leq \gamma^2 (\|u_1\|^2 + \|u_2\|^2) \quad (6.75)$$

for alle $u_1, u_2 \in L_2$. ■

Påstand 6.2 Gitt systemet (6.71–6.74). Anta at systemet er L_2 -stabilt. Da vil $u_1, u_2 \in L_2 \Rightarrow e_1, e_2 \in L_2$ og i tillegg eksisterer det en γ_e slik at

$$\|e_1\|^2 + \|e_2\|^2 \leq \gamma_e^2(\|u_1\|^2 + \|u_2\|^2) \quad (6.76)$$

for alle $u_1, u_2 \in L_2$.

Bevis: Fra (6.71), (6.72) og trekantulikheten finner vi

$$\|e_1\| = \|u_1 + y_1\| \leq \|u_1\| + \|y_1\| \leq (1 + \gamma)\sqrt{\|u_1\|^2 + \|u_2\|^2} \quad (6.77)$$

$$\|e_2\| = \|u_2 + y_2\| \leq \|u_2\| + \|y_2\| \leq (1 + \gamma)\sqrt{\|u_1\|^2 + \|u_2\|^2} \quad (6.78)$$

Dermed er

$$\|e_1\|^2 + \|e_2\|^2 \leq 2(1 + \gamma)^2(\|u_1\|^2 + \|u_2\|^2) \quad (6.79)$$

og resultatet er oppfylt med $\gamma_e = \sqrt{2}(1 + \gamma)$. ■

6.3 Passivitet og stabilitet

Teorem 6.3 Gitt systemet (6.71–6.74). Anta at det eksisterer konstanter $\delta_1, \delta_2, \epsilon_1, \epsilon_2, \beta_1, \beta_2$ slik at

$$\langle u, \mathcal{H}_1 u \rangle_T \geq \delta_1 \|u\|_T^2 + \epsilon_1 \|\mathcal{H}_1 u\|_T^2 + \beta_1 \quad (6.80)$$

$$\langle u, \mathcal{H}_2 u \rangle_T \geq \delta_2 \|u\|_T^2 + \epsilon_2 \|\mathcal{H}_2 u\|_T^2 + \beta_2 \quad (6.81)$$

for alle $T \geq 0$ og alle $u \in L_{2e}$, og at

$$\epsilon_1 + \delta_2 > 0 \quad \text{og} \quad \epsilon_2 + \delta_1 > 0 \quad (6.82)$$

Da gjelder:

1. Hvis $u_1, u_2 \in L_2$, så er $y_1, y_2 \in L_2$.
2. Hvis i tillegg $\beta_1 = \beta_2 = 0$, så er systemet L_2 -stabilt.

Bevis*: Fra (6.71) og (6.72) ser man at

$$\langle y_1, e_1 \rangle_T + \langle y_2, e_2 \rangle_T = \langle y_1, u_1 \rangle_T + \langle y_2, u_2 \rangle_T \quad (6.83)$$

Fra passivitetsulikhetene (6.80) og (6.81) og ligningene (6.73) og (6.74) fremkommer

$$\langle y_1, e_1 \rangle_T + \langle y_2, e_2 \rangle_T \geq \delta_1 \|e_1\|_T^2 + \epsilon_1 \|y_1\|_T^2 + \beta_1 + \delta_2 \|e_2\|_T^2 + \epsilon_2 \|y_2\|_T^2 + \beta_2 \quad (6.84)$$

Innsetting av (6.83) gir

$$\langle y_1, u_1 \rangle_T + \langle y_2, u_2 \rangle_T \geq \delta_1 \|e_1\|_T^2 + \epsilon_1 \|y_1\|_T^2 + \beta_1 + \delta_2 \|e_2\|_T^2 + \epsilon_2 \|y_2\|_T^2 + \beta_2 \quad (6.85)$$

Ved å benytte sammenhengene $\|e_1\|_T^2 = \langle e_1, e_1 \rangle_T$, $\|e_2\|_T^2 = \langle e_2, e_2 \rangle_T$, $e_1 = u_1 - y_1$ og $e_2 = u_2 + y_2$ fås

$$\begin{aligned} \delta_1 \|e_1\|_T^2 + \delta_2 \|e_2\|_T^2 &= \delta_1 (\|y_2\|_T^2 - 2\langle y_2, u_1 \rangle_T + \|u_1\|_T^2) \\ &\quad + \delta_2 (\|y_1\|_T^2 + 2\langle y_1, u_2 \rangle_T + \|u_2\|_T^2) \end{aligned} \quad (6.86)$$

Innsetting i (6.85) gir

$$\begin{aligned}
 (\epsilon_1 + \delta_2)\|y_1\|_T^2 + (\epsilon_2 + \delta_1)\|y_2\|_T^2 &\leq -\delta_1\|u_1\|_T^2 - \delta_2\|u_2\|_T^2 \\
 &\quad + \langle y_1, (u_1 - 2\delta_2 u_2) \rangle_T \\
 &\quad + \langle y_2, (u_2 - 2\delta_1 u_1) \rangle_T \\
 &\quad - \beta_1 - \beta_2
 \end{aligned} \tag{6.87}$$

Schwarz ulikhet og trekantulikheten gir

$$\begin{aligned}
 \langle y_1, (u_1 - 2\delta_2 u_2) \rangle_T &\leq \|y_1\|_T \|u_1\|_T + 2\delta_2 \|y_1\|_T \|u_2\|_T \\
 \langle y_2, (u_2 - 2\delta_1 u_1) \rangle_T &\leq \|y_2\|_T \|u_2\|_T + 2\delta_1 \|y_2\|_T \|u_1\|_T
 \end{aligned}$$

Dette resulterer i

$$\begin{aligned}
 (\epsilon_1 + \delta_2)\|y_1\|_T^2 + (\epsilon_2 + \delta_1)\|y_2\|_T^2 &\leq |\delta_1|\|u_1\|_T^2 + |\delta_2|\|u_2\|_T^2 \\
 &\quad + \|y_1\|_T \|u_1\|_T + 2|\delta_2|\|y_1\|_T \|u_2\|_T \\
 &\quad + \|y_2\|_T \|u_2\|_T + 2|\delta_1|\|y_2\|_T \|u_1\|_T \\
 &\quad + |\beta_1| + |\beta_2|
 \end{aligned} \tag{6.88}$$

Dette er en ulikhet av typen

$$a_1 p^2 - b_1 p + a_2 q^2 - b_2 q \leq d^2 \tag{6.89}$$

\Downarrow

$$a_1 \left(p - \frac{b_1}{2a_1}\right)^2 + a_2 \left(q - \frac{b_2}{2a_2}\right)^2 \leq c^2 \tag{6.90}$$

\Downarrow

$$p \leq \frac{b_1}{2a_1} + \frac{c}{\sqrt{a_1}} \quad \text{og} \quad q \leq \frac{b_2}{2a_2} + \frac{c}{\sqrt{a_2}} \tag{6.91}$$

Her er $p = \|y_1\|_T^2$ og $q = \|y_2\|_T^2$ reelle variable,

$$a_1 = \epsilon_1 + \delta_2 > 0 \quad \text{og} \quad a_2 = \epsilon_2 + \delta_1 > 0$$

$$b_1 = \|u_1\|_T + 2|\delta_2|\|u_2\|_T \quad \text{og} \quad b_2 = \|u_2\|_T + 2|\delta_1|\|u_1\|_T$$

$$d^2 = |\delta_1|\|u_1\|_T^2 + |\delta_2|\|u_2\|_T^2 + |\beta_1| + |\beta_2|$$

og

$$c^2 = d^2 + a_1 \left(\frac{b_1}{2a_1}\right)^2 + a_2 \left(\frac{b_2}{2a_2}\right)^2$$

er reelle konstanter for gitte pådrag u_1 og u_2 .

Hvis $u_1, u_2 \in L_2$ så eksisterer $\|u_1\|$ og $\|u_2\|$. Da er $\|u_1\|_T \leq \|u_1\|$ og $\|u_2\|_T \leq \|u_2\|$ for alle $T \geq 0$, og b_1, b_2 og c er positive og endelige. Da må også p og q være endelige for alle $T \geq 0$ og spesielt når $T \rightarrow \infty$, og følgelig eksisterer $\|y_1\|$ og $\|y_2\|$ som igjen betyr at $y_1, y_2 \in L_2$.

L_2 -stabilitet for $\beta_1 = \beta_2 = 0$ er vist i [40]. ■

Korollar 6.3 Gitt systemet (6.71–6.74). Anta at \mathcal{H}_1 og \mathcal{H}_2 er strengt passive. Da gjelder:

1. Hvis $u_1, u_2 \in L_2$, så er $y_1, y_2 \in L_2$.

2. Hvis i tillegg $\beta_1 = \beta_2 = 0$, så er systemet L_2 -stabilt.

Bevis: I dette tilfelle er $\delta_1 > 0$ og $\delta_2 > 0$ og $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 0$ og teorem 6.3 er oppfylt. ■

Korollar 6.4 Gitt systemet (6.71–6.74). Anta at \mathcal{H}_1 er strengt passiv og L_2 -stabil, mens \mathcal{H}_2 er passiv, dvs. det fins konstanter $\delta > 0$, $\gamma > 0$ og β, β_2 slik at

$$\langle u, \mathcal{H}_1 u \rangle_T \geq \delta \|u\|_T^2 + \beta \quad (6.92)$$

$$\|\mathcal{H}_1 u\|_T \leq \gamma \|u\|_T \quad (6.93)$$

$$\langle u, \mathcal{H}_2 u \rangle_T \geq \beta_2 \quad (6.94)$$

for alle $T \geq 0$ og alle $u \in L_{2e}$. Da gjelder:

1. Hvis $u_1, u_2 \in L_2$, så er $y_1, y_2 \in L_2$.

2. Hvis i tillegg $\beta = \beta_2 = 0$, så er systemet L_2 -stabilt.

Bevis: For dette systemet er

$$\|u\|_T \geq \frac{1}{\gamma} \|\mathcal{H}_1 u\|_T \quad (6.95)$$

La $\alpha \in (0, \delta)$. Da kan passivitetsulikheten til \mathcal{H}_1 skrives

$$\begin{aligned} \langle u, \mathcal{H}_1 u \rangle_T &\geq (\delta - \alpha) \|u\|_T^2 + \alpha \|u\|_T^2 + \beta_1 \\ &\geq (\delta - \alpha) \|u\|_T^2 + \frac{\alpha}{\gamma^2} \|\mathcal{H}_1 u\|_T^2 + \beta \end{aligned} \quad (6.96)$$

Dermed er teorem 6.3 oppfylt med $\delta_1 = \delta - \alpha$, $\epsilon_1 = \alpha\gamma^{-2}$, $\delta_2 = 0$ og $\epsilon_2 = 0$. ■

Korollar 6.5 Hvis betingelsen på \mathcal{H}_1 og \mathcal{H}_2 byttes om i korollar 6.4, så gjelder fortsatt resultatene 1 og 2. ■

Eksempel 6.10 Gitt systemet

$$\dot{e}(t) = \frac{1}{2} \eta(t) \omega(t) \quad (6.97)$$

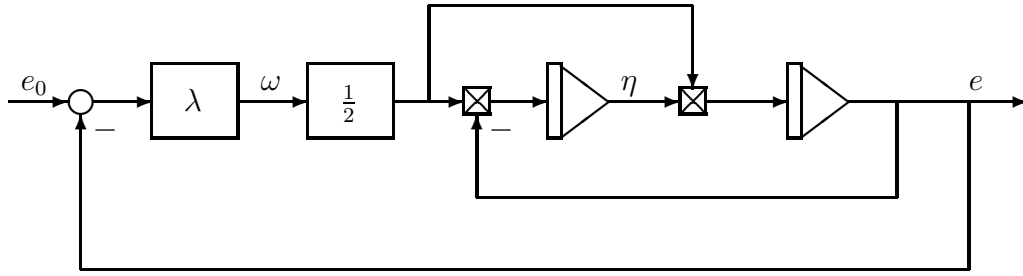
$$\dot{\eta}(t) = -\frac{1}{2} e(t) \omega(t) \quad (6.98)$$

hvor

$$e(t)^2 + \eta(t)^2 = 1 \quad (6.99)$$

for alle t . Vi betrakter ω som pådraget til systemet. De variable e og η er Eulerparametere eller kvaternioner for rotasjon om en fast akse med vinkelhastighet ω . Hvis θ er rotasjonsvinkelen slik at $\dot{\theta} = \omega$, så er $e = \sin(\theta/2)$ og $\eta = \cos(\theta/2)$. For generelle rotasjoner er kvaternioner meget hensiktsmessige for analyse og design av regulatorer. Pådraget settes lik

$$\omega = \lambda(e_0 - e) \quad (6.100)$$



Figur 6.10: Ulineær prosess med tilbakekobling

hvor e_0 er referansen til e . Det tilbakekoblede systemet er vist i figur 6.10.

Vi definerer operatorene $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2 : L_{2e} \rightarrow L_{2e}$ ved

$$e = \mathcal{H}_1 \omega \quad (6.101)$$

$$\lambda e = \mathcal{H}_2 e \quad (6.102)$$

Vi finner at

$$\langle \omega, \mathcal{H}_1 \omega \rangle_T = \langle \omega, e \rangle_T = \int_0^T \omega(t) e(t) dt \quad (6.103)$$

$$= -2 \int_0^T \dot{\eta} dt \quad (6.104)$$

$$= 2[\eta(0) - \eta(T)] \quad (6.105)$$

Fra (6.99) er det klart at $|\eta(t)| \leq 1$, og dermed er

$$\langle \omega, \mathcal{H}_1 \omega \rangle_T \geq 2[\eta(0) - 1] \quad (6.106)$$

for alle $\omega \in L_{2e}$ og alle $T \geq 0$. \mathcal{H}_1 er dermed passiv. Spesielt har vi at hvis $\eta(0) = 1$, så er

$$\langle \omega, \mathcal{H}_1 \omega \rangle_T \geq 0 \quad (6.107)$$

for alle $\omega \in L_{2e}$ og alle $T \geq 0$.

Det er enklere å analysere \mathcal{H}_2 . Vi finner at \mathcal{H}_2 er strengt passiv med forsterkning λ siden

$$\langle e, \mathcal{H}_2 e \rangle_T = \lambda \|e\|_T^2 \quad (6.108)$$

og

$$\|\mathcal{H}_2 e\|_T = \lambda \|e\|_T \quad (6.109)$$

Det følger da av korollar 6.5 at

1. Hvis $e_0 \in L_2$, så er $\omega, e \in L_2$.
2. Hvis initialtilstanden til systemet er $e(0) = 0, \eta(0) = 1$, så er systemet L_2 -stabilt hvilket betyr at

$$e_0 \in L_2 \Rightarrow \omega, e \in L_2$$

og at det eksisterer konstanter γ_ω og γ_e slik at

$$\|\omega\| \leq \gamma_\omega \|e_0\| \quad \text{og} \quad \|e\| \leq \gamma_e \|e_0\| \quad (6.110)$$

For dette spesielle systemet kan vi finne konstanter γ_ω og γ_e som følger: Vi har

$$\lambda e_0 = \omega + \lambda e \quad (6.111)$$

Dermed er

$$\lambda^2 \|e_0\|^2 = \|\omega\|^2 + \lambda^2 \|e\|^2 + \langle \omega, e \rangle \quad (6.112)$$

Hvis initialtilstanden til systemet er $e(0) = 0, \eta(0) = 1$, så er $\langle \omega, e \rangle \geq 0$ og dermed

$$\lambda^2 \|e_0\|^2 \geq \|\omega\|^2 + \lambda^2 \|e\|^2 \quad (6.113)$$

Dette betyr at $\gamma_\omega = \lambda^2$ og $\gamma_e = 1$ vil oppfylle (6.110). ■

Korollar 6.6 Gitt systemet (6.71–6.74). Anta at \mathcal{H}_1 er L_2 -stabil og at \mathcal{H}_1 er strengt passiv eller \mathcal{H}_2 er y -strengt passiv, dvs. det eksisterer konstanter δ og ϵ og en positiv endelig konstant γ slik at

$$\langle u, \mathcal{H}_1 u \rangle_T \geq \delta \|u\|_T^2 + \beta \quad (6.114)$$

$$\|\mathcal{H}_1 u\|_T \leq \gamma \|u\|_T \quad (6.115)$$

$$\langle u, \mathcal{H}_2 u \rangle_T \geq \epsilon \|\mathcal{H}_2 u\|_T^2 + \beta_2 \quad (6.116)$$

for alle $T \geq 0$ og alle $u \in L_{2e}$. Da gjelder:

1. Hvis $u_1, u_2 \in L_2$, så er $y_1, y_2 \in L_2$.
2. Hvis i tillegg $\beta = \beta_2 = 0$, så er systemet L_2 -stabilt.

Bevis: Også i dette tilfelle gjelder (6.96). For tilstrekkelig små α er derfor teorem 6.3 oppfylt med

$$\epsilon_1 + \delta_2 = \frac{\alpha}{\gamma^2} > 0 \quad \text{og} \quad \epsilon_2 + \delta_1 = \delta + \epsilon - \alpha > 0 \quad (6.117)$$

■

6.4 Passivt system med PID-regulator

Påstand 6.3 Vi betrakter systemet

$$y = \mathcal{H}u, \quad u = \mathcal{H}_r e \quad (6.118)$$

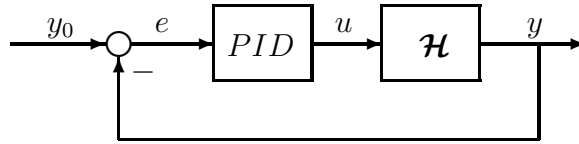
$$e(t) = y_0(t) - y(t) \quad (6.119)$$

hvor operatoren $\mathcal{H} : L_{2e} \rightarrow L_{2e}$ representerer prosessen og $\mathcal{H}_r : L_{2e} \rightarrow L_{2e}$ representerer regulatoren. Anta at \mathcal{H} er passiv, og at regulatoren \mathcal{H}_r er en PID-regulator med begrenset integral- og derivatvirkning som vist i figur 6.11.

På Laplacetransformert form er regulatoren $u(s) = h_r(s)e(s)$ hvor

$$h_r(s) = K_p \beta \frac{1 + T_i s}{1 + \beta T_i s} \frac{1 + T_d s}{1 + \alpha T_d s} \quad (6.120)$$

med $1 < \beta < \infty$ og $0 < \alpha < 1$. Da gjelder:



Figur 6.11: Passiv prosess med PID-regulator

1. Hvis $y_0 \in L_2$ så er $u, y \in L_2$.
2. Hvis $\langle u, \mathcal{H}u \rangle_T \geq 0$ for alle $u \in L_{2e}$ og alle $T \geq 0$, og initialverdiene til regulatoren er null, så er systemet L_2 -stabilt.

Bevis: Fra påstand 5.3 har vi at

$$|h_r(j\omega)| \leq \frac{K_p \beta}{\alpha} \quad (6.121)$$

og at

$$\operatorname{Re}[h_r(j\omega)] \geq K_p \quad (6.122)$$

I L_2 -formulering betyr dette at det eksisterer en b' slik at

$$\|\mathcal{H}_r e\|_T \leq K_p \|e\|_T + b' \quad (6.123)$$

og en b slik at

$$\langle e, \mathcal{H}_r e \rangle_T \leq K_p \|e\|_T^2 + b \quad (6.124)$$

Hvis initialverdiene til regulatoren er null, så er $b = b' = 0$. Resultatet følger dermed fra korollar 6.4. ■

Eksempel 6.11 En motor med treghetsmoment J_m driver en last med treghetsmoment J_L over en ulineær fjær med fjærkraft $\phi_K(\Delta\theta)$ og en demper med dempekraft $\phi_D(\Delta\dot{\theta})$ hvor $\phi_K(\cdot)$ og $\phi_D(\cdot)$ er sektorulineariteter og $\Delta\theta = \theta_L - \theta_m$. Bevegelsesligningene er

$$J_m \ddot{\theta}_m = \phi_K(\Delta\theta) + \phi_D(\Delta\dot{\theta}) + T_m + F(\dot{\theta}_m) \quad (6.125)$$

hvor F er friksjonen gitt ved

$$F(\dot{\theta}_m) = \begin{cases} F_0, & \dot{\theta}_m < 0 \\ -F_0, & \dot{\theta}_m > 0 \end{cases} \quad (6.126)$$

og

$$J_L(\ddot{\theta}_m + \Delta\ddot{\theta}) = -[\phi_K(\Delta\theta) + \phi_D(\Delta\dot{\theta})] \quad (6.127)$$

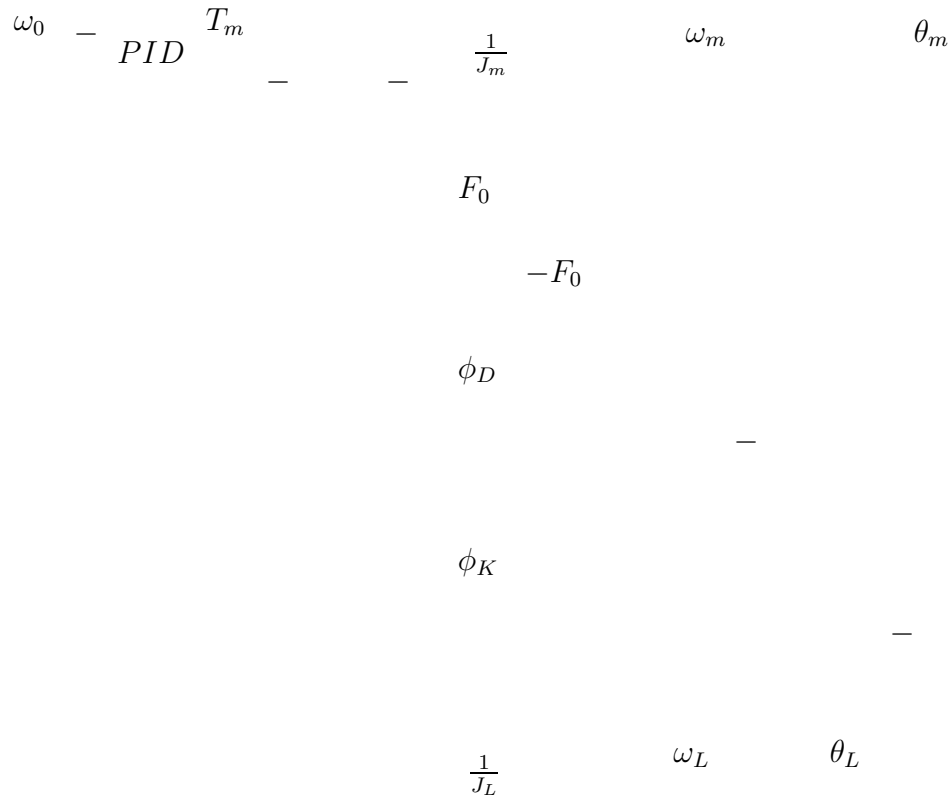
Her er θ_m motorvinkelen, $\Delta\theta$ er vinkeldreiningen over fjæren, og T_m er motormomentet. En PID-regulator benyttes som vist i figur 6.12.

Systemet har totalenergi

$$V = \frac{1}{2} [J_m \dot{\theta}_m^2 + J_L (\dot{\theta}_m + \Delta\dot{\theta})^2] + \int_0^{\Delta\theta} \phi_K(x) dx \quad (6.128)$$

Den tidsderiverte av energien er

$$\dot{V} = T_m \dot{\theta}_m - |F_0 \dot{\theta}_m| - \phi_D(\Delta\dot{\theta}) \Delta\dot{\theta} \quad (6.129)$$



Figur 6.12: Motor med ulineær friksjon og ulineær fjær tilbakekoblet med PID-regulator fra vinkelhastigheten

For at systemet skal være passivt med T_m som pådrag og $\dot{\theta}_m$ som måling, må V ha en nedre begrensning, og

$$g(t) = |F_0 \dot{\theta}_m| + \phi_D (\Delta \dot{\theta}) \Delta \dot{\theta} \geq 0 \quad (6.130)$$

Dette er oppfylt hvis $\phi_K, \phi_D \in \text{sector}[0, \infty)$, som er oppfylt for alle fysiske fjærer og dempere.

Vi kan derfor konkludere med at:

1. Hvis motoren styres med T_m som pådrag og $\dot{\theta}_m$ som måling, så vil det lukkede system være asymptotisk stabilt med en PID-regulator

$$h_r(s) = K_p \beta \frac{1 + T_i s}{1 + \beta T_i s} \frac{1 + T_d s}{1 + \alpha T_d s} \quad (6.131)$$

hvor $T_i < T_d$, $\beta > 1$ og $0 < \alpha < 1$.

2. Hvis andre variable brukes som pådrag eller måling, kan man ikke trekke noen slutninger på bakgrunn av passivitetsteori. Systemet er f.eks. ikke passivt hvis θ_m er målingen.

■

6.5 Forming av potensiell energi

Vi betrakter prosessen

$$y = \mathcal{H}u, \quad (6.132)$$

med regulator

$$u = \mathcal{H}_r[y_0(t) - y(t)] \quad (6.133)$$

hvor operatoren $\mathcal{H} : L_{2e} \rightarrow L_{2e}$ representerer prosessen og $\mathcal{H}_r : L_{2e} \rightarrow L_{2e}$ representerer regulatoren. Vi antar at

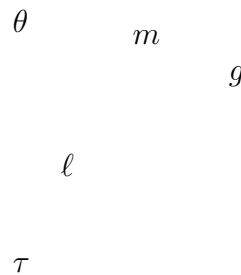
$$\langle u, \mathcal{H}u \rangle_T \geq \delta \|u\|_T^2 + \epsilon_1 \|\mathcal{H}u\|_T^2 + \beta \quad (6.134)$$

$$\langle e, \mathcal{H}_r e \rangle_T \geq \delta_r \|e\|_T^2 + \epsilon_r \|\mathcal{H}_r e\|_T^2 + \beta_r \quad (6.135)$$

for alle $T \geq 0$ og alle $u, e \in L_{2e}$, og at

$$\epsilon_1 + \delta_2 > 0 \quad \text{og} \quad \epsilon_2 + \delta_1 > 0 \quad (6.136)$$

For å påvise L_2 -stabilitet i teorem 6.3 og korollarene 6.3–6.6 må vi ha $\beta = 0$ og $\beta_r = 0$. Vi har tidligere sett at β vil avhenge av initialverdiene for prosessen. Det kan imidlertid forekomme at prosessen ikke kan oppfylle $\beta = 0$ for den tilstanden vi ønsker å regulere omkring. I visse tilfeller kan en da benytte en prekompensator for å oppnå $\beta = 0$ for den aktuelle tilstanden, og L_2 -stabilitet kan dermed oppnås ved å bruke en passende regulator.



Figur 6.13: *Invertert pendel*

Vi skal studere denne teknikken for en invertert pendel som er vist i figur 6.13. Pendelen har en punktmasse m på en stang av lengde ℓ . Vinkelhastighet er ω , og vinkelutslaget til pendelen er θ slik at $\dot{\theta} = \omega$ og nullpunktet velges slik at $\theta = 0$ når pendelen peker vertikalt oppover. Om opplagringspunktet virker momentet τ . Spinnsatsen gir

$$m\ell^2\ddot{\theta} = mg\ell \sin \theta + \tau \quad (6.137)$$

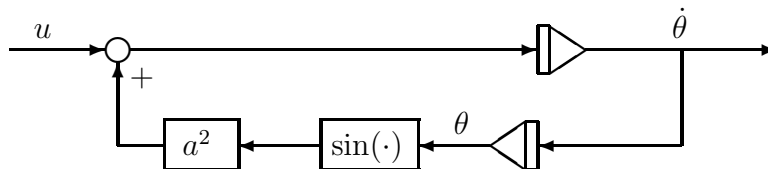
hvor $g > 0$ er tyngdeakselerasjonen. Vi definerer $a^2 \triangleq \frac{g}{\ell}$ og skalerer pådraget ved å sette $\tau = m\ell^2 u$. Dette gir

$$\ddot{\theta} = a^2 \sin \theta + u \quad (6.138)$$

Vi kan her vise at når u er pådrag og $\dot{\theta}$ er måling som vist i figur 6.14, så er prosessen passiv. Dette finnes av følgende utregning:

$$\begin{aligned}
 \langle u, \dot{\theta} \rangle_T &= \langle \ddot{\theta}, \dot{\theta} \rangle_T - \langle a^2 \sin \theta, \dot{\theta} \rangle_T \\
 &= \int_0^T \ddot{\theta}(t) \dot{\theta}(t) dt - \int_0^T a^2 \sin \theta(t) \dot{\theta}(t) dt \\
 &= \int_{\dot{\theta}(0)}^{\dot{\theta}(T)} \dot{\theta}(t) d\dot{\theta} - \int_{\theta(0)}^{\theta(T)} a^2 \sin \theta(t) d\theta \\
 &= \frac{1}{2} [\dot{\theta}^2(T) - \dot{\theta}^2(0)] + a^2 [\cos \theta(T) - \cos \theta(0)] \\
 &\geq -\frac{1}{2} \dot{\theta}^2(0) - a^2 [1 + \cos \theta(0)] \triangleq \beta
 \end{aligned} \tag{6.139}$$

siden $\dot{\theta}^2(T) \geq 0$ og $\cos \theta(T) \geq -1$. Eneste mulighet til å oppnå $\beta = 0$ er at $\dot{\theta}(0) = 0$ og at $\cos \theta(0) = -1$ hvilket betyr at $\theta(0) = -\pi$, dvs. pendelen henger initielt rett ned. Dette betyr at L_2 -stabilitet kun kan undersøkes omkring $\theta = -\pi$. Vi ønsker imidlertid å balansere pendelen omkring $\theta = 0$, og må derfor prøve å oppnå $\beta = 0$ for en initialtilstand hvor $\theta(0) = 0$.



Figur 6.14: Blokkdiagram for invertert pendel

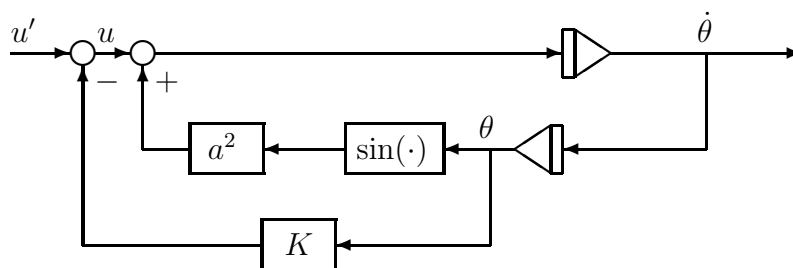
Vi setter på en prekompensator

$$u = -K\theta + u' \tag{6.140}$$

og får prosessen

$$\ddot{\theta} = -K\theta + a^2 \sin \theta + u' \tag{6.141}$$

som vist i figur 6.15.



Figur 6.15: Blokkdiagram for invertert pendel med prekompensering

Her er leddet $a^2 \sin \theta$ assosiert med gravitasjonen som gir potensiell energi med et maksimum for $\theta = 0$. Leddet $-K\theta$ svarer til momentet fra en fjær som har sitt nullpunkt for $\theta = 0$ og som dermed gir et bidrag til den potensielle energien med et minimum for $\theta = 0$. Hvis nå K velges slik at den potensielle energien fra fjæren dominerer over gravitasjonspotensialet, så vil den prekompenserte pendelen få et potensiale som har

sitt minimum for $\theta = 0$, dvs. når pendelen peker oppover. Hvis dette minimum av den potensielle energien defineres lik null, så kan energifunksjonen bli lik null for $\theta = 0$ hvis den kinetiske energien er lik null. Dette betyr at $\beta = 0$ kan oppnås også for en initialtilstand hvor $\theta = 0$. Vi velger derfor $K \geq a^2$ som gir

$$K\theta - a^2 \sin \theta \in \text{sector}[0, k] \quad \text{for alle } \theta \quad (6.142)$$

hvor k er en konstant som er mellom K og $2K$. Vi definerer

$$\Phi(\theta) \triangleq \int_0^\theta [K\psi - a^2 \sin \psi] d\psi \quad (6.143)$$

Siden integranden ligger i $\text{sector}[0, k]$, er $\Phi(\theta) \geq 0$ for alle ψ , og dessuten gjelder $\Phi(\theta) = 0 \Leftrightarrow \theta = 0$. Vi finner nå at

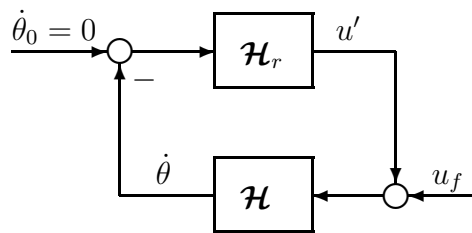
$$\begin{aligned} \langle u', \dot{\theta} \rangle_T &= \langle \ddot{\theta}, \dot{\theta} \rangle_T + \langle K\theta - a^2 \sin \theta, \dot{\theta} \rangle_T \\ &= \int_0^T \ddot{\theta}(t) \dot{\theta}(t) dt + \int_0^T [K\theta(t) - a^2 \sin \theta(t)] \dot{\theta}(t) dt \\ &= \int_{\dot{\theta}(0)}^{\dot{\theta}(T)} \dot{\theta}(t) d\dot{\theta} + \int_{\theta(0)}^{\theta(T)} [K\theta - a^2 \sin \theta] d\theta \\ &= \frac{1}{2} [\dot{\theta}^2(T) - \dot{\theta}^2(0)] + \Phi[\theta(T)] - \Phi[\theta(0)] \\ &\geq -\frac{1}{2} \dot{\theta}^2(0) - \Phi[\theta(0)] \triangleq \beta \end{aligned} \quad (6.144)$$

Dermed kan $\beta = 0$ oppnås for $\theta(0) = 0$ og $\dot{\theta}(0) = 0$.

Anta at et forstyrrende moment $\tau_f = m\ell^2 u_f$ virker slik at $\tau = m\ell^2(u + u_f)$. Ifølge korollar 6.5 har vi da at hvis en strengt passiv regulator \mathcal{H}_r med begrenset forsterkning og $\beta_2 = 0$ benyttes, så er systemet L_2 -stabil om $\theta(0) = 0$ og $\dot{\theta}(0) = 0$. Dette betyr at hvis pendelen har initialtilstand $\theta(0) = 0$ og $\dot{\theta}(0) = 0$ og blir utsatt for en forstyrrelse $u_f \in L_2$, så vil $\dot{\theta}, u' \in L_2$, og det fins en konstant γ slik at

$$\|\dot{\theta}\|^2 + \|u'\|^2 \leq \gamma^2 \|u_f\|^2$$

hvilket betyr at hvis $\|u_f\|$ er tilstrekkelig liten, så er $\|\dot{\theta}\|$ og $\|u'\|$ små.



Figur 6.16: Prekompensert invertert pendel representert ved operatoren \mathcal{H} med regulator \mathcal{H}_r og forstyrrelse u_f

6.6 Passivitet, spredning og stabilitet

Vi skal her se på spredningsrepresentasjon av en operator $\mathcal{H} : L_{2e} \rightarrow L_{2e}$ og finne betingelser på spredningsoperatoren som svarer til passivitet for \mathcal{H} . Deretter skal stabilitetskriterier for passive tilbakekoblede systemer utledes for spredningsrepresentasjonen.

Som før betrakter vi systemet

$$y = \mathcal{H}u \quad (6.145)$$

og definerer

$$a = y + u \quad \text{og} \quad b = y - u \quad (6.146)$$

Spredningsoperatoren assosiert med \mathcal{H} er $\mathcal{S} : L_{2e} \rightarrow L_{2e}$ som er gitt ved

$$b = \mathcal{S}a \quad (6.147)$$

Vi lar $\mathcal{I} : L_{2e} \rightarrow L_{2e}$ betegne enhetsoperatoren på L_{2e} som er definert ved $\mathcal{I}u = u$ for alle $u \in L_{2e}$. Da er

$$a = (\mathcal{H} + \mathcal{I})u \quad \text{og} \quad b = (\mathcal{H} - \mathcal{I})u \quad (6.148)$$

Under forutsetning av at $(\mathcal{H} + \mathcal{I})^{-1} : L_{2e} \rightarrow L_{2e}$ er veldefinert er spredningsoperatoren gitt ved

$$\mathcal{S} = (\mathcal{H} - \mathcal{I})(\mathcal{H} + \mathcal{I})^{-1} \quad (6.149)$$

Påstand 6.4 Gitt systemet i ligning (6.145)–(6.149). Da gjelder:

1. \mathcal{H} er passiv med $\beta = 0$, dvs.

$$\langle u, \mathcal{H}u \rangle_T \geq 0 \quad (6.150)$$

for alle $u \in L_{2e}$ og alle $T \geq 0$ hvis og bare hvis \mathcal{S} har forsterkning mindre eller lik 1, dvs.

$$\|\mathcal{S}a\|_T^2 \leq \|a\|_T^2 \quad (6.151)$$

for alle $a \in L_{2e}$ og alle $T \geq 0$.

2. \mathcal{H} er L_2 -stabil med forsterkning γ og er strengt passiv, dvs. det eksisterer en $\delta > 0$ slik at

$$\|\mathcal{H}u\|_T \leq \gamma \|u\|_T \quad (6.152)$$

$$\langle u, \mathcal{H}u \rangle_T \geq \delta \|u\|_T^2 \quad (6.153)$$

for alle $u \in L_{2e}$ og alle $T \geq 0$ hvis og bare hvis \mathcal{S} har forsterkning mindre enn 1, dvs. det fins en $\gamma' \in (0, 1)$ slik at

$$\|\mathcal{S}a\|_T^2 \leq (1 - \gamma') \|a\|_T^2 \quad (6.154)$$

for alle $a \in L_{2e}$ og alle $T \geq 0$.

Bevis: Vi har følgende ligninger:

$$\mathcal{S}a = (\mathcal{H} - \mathcal{I})u \quad \text{og} \quad a = (\mathcal{I} + \mathcal{H})u \quad (6.155)$$

Dermed får vi at

$$\|\mathcal{S}a\|_T^2 = \|\mathcal{H}u\|_T^2 + \|u\|_T^2 - 2\langle u, \mathcal{H}u \rangle_T \quad (6.156)$$

$$\|a\|_T^2 = \|\mathcal{H}u\|_T^2 + \|u\|_T^2 + 2\langle u, \mathcal{H}u \rangle_T \quad (6.157)$$

og det følger at

$$\|\mathcal{S}a\|_T^2 = \|a\|_T^2 - 4\langle u, \mathcal{H}u \rangle_T \quad (6.158)$$

Ekvivalens av (6.150) og (6.151) følger dermed umiddelbart.

Anta så at \mathcal{H} er strengt passiv med endelig forsterkning γ . Da er

$$\|a\|_T = \|(\mathcal{I} + \mathcal{H})u\|_T \leq (1 + \gamma)\|u\|_T \quad (6.159)$$

og vi får

$$4\langle u, \mathcal{H}u \rangle_T \geq 4\delta\|u\|_T^2 \geq \frac{4\delta}{(1 + \gamma)^2}\|a\|_T^2 \geq \gamma'\|a\|_T^2 \quad (6.160)$$

hvor γ' velges slik at $0 < \gamma' < \min[1, 4\delta(1 + \gamma)^{-2}]$. Dette gir innsatt i (6.158)

$$\|\mathcal{S}a\|_T^2 \leq (1 - \gamma')\|a\|_T^2 \quad (6.161)$$

hvor $0 \leq 1 - \gamma' < 1$.

Dernest antar vi at \mathcal{S} har forsterkning mindre enn 1. Da gir (6.154) og (6.158)

$$4\langle u, \mathcal{H}u \rangle_T = \|a\|_T^2 - \|\mathcal{S}a\|_T^2 \geq \gamma'\|a\|_T^2 \quad (6.162)$$

Innsetting av (6.157) gir

$$4\langle u, \mathcal{H}u \rangle_T \geq \gamma'(\|\mathcal{H}u\|_T^2 + \|u\|_T^2 + 2\langle u, \mathcal{H}u \rangle_T) \quad (6.163)$$

Denne ulikheten kan forenkles til

$$(4 - 2\gamma')\langle u, \mathcal{H}u \rangle_T \geq \gamma'(\|\mathcal{H}u\|_T^2 + \|u\|_T^2) \quad (6.164)$$

og det følger at

$$\langle u, \mathcal{H}u \rangle_T \geq \delta(\|u\|_T^2 + \|\mathcal{H}u\|_T^2) \geq \delta\|u\|_T^2 \quad (6.165)$$

hvor $\delta = \gamma'/(4 - 2\gamma') > 0$ hvilket betyr at \mathcal{H} er strengt passiv. For å vise endelig forsterkning settes (6.156) og (6.157) inn i (6.154). Dette gir

$$\|\mathcal{H}u\|_T^2 + \|u\|_T^2 - 2\langle u, \mathcal{H}u \rangle_T \leq (1 - \gamma')(\|\mathcal{H}u\|_T^2 + \|u\|_T^2 + 2\langle u, \mathcal{H}u \rangle_T) \quad (6.166)$$

↓

$$\gamma'\|\mathcal{H}u\|_T^2 \leq (4 - 2\gamma')\langle u, \mathcal{H}u \rangle_T - \gamma'\|u\|_T^2 \quad (6.167)$$

som sammen med $|\langle u, \mathcal{H}u \rangle_T| \leq \|u\|_T\|\mathcal{H}u\|_T$ gir

$$\|\mathcal{H}u\|_T^2 - 2\frac{2 - \gamma'}{\gamma'}\|\mathcal{H}u\|_T\|u\|_T + \|u\|_T^2 \leq 0 \quad (6.168)$$

som gir

$$\|\mathcal{H}u\|_T \leq \frac{2 - \gamma'}{\gamma'} + \sqrt{\left(\frac{2 - \gamma'}{\gamma'}\right)^2 - 1} \leq 2\frac{2 - \gamma'}{\gamma'} \quad (6.169)$$

og vi har dermed vist at (6.152) er oppfylt med $\gamma = (4 - 2\gamma')/\gamma'$. ■

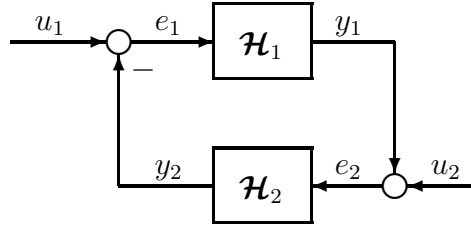
Vi betrakter så igjen det tilbakekoblede systemet i figur 6.17 hvor forovergrenen er gitt av en operator $\mathcal{H}_1 : L_{2e} \rightarrow L_{2e}$ og tilbakekoblingsgrenen med en operator $\mathcal{H}_2 : L_{2e} \rightarrow L_{2e}$ slik at

$$e_1 = u_1 - y_2 \quad (6.170)$$

$$e_2 = u_2 + y_1 \quad (6.171)$$

$$y_1 = \mathcal{H}_1 e_1 \quad (6.172)$$

$$y_2 = \mathcal{H}_2 e_2 \quad (6.173)$$



Figur 6.17: Tilbakekoblet prosess

Vi definerer

$$a_1 = y_1 + e_1 \quad \text{og} \quad a_2 = y_2 + e_2 \quad (6.174)$$

$$b_1 = y_1 - e_1 \quad \text{og} \quad b_2 = y_2 - e_2 \quad (6.175)$$

$$r_1 = u_1 - u_2 \quad \text{og} \quad r_2 = u_1 + u_2 \quad (6.176)$$

Videre defineres spredningsoperatorene $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2 : L_{2e} \rightarrow L_{2e}$ ved

$$\mathcal{S}_1 = (\mathcal{H}_1 - \mathcal{I})(\mathcal{H}_1 + \mathcal{I})^{-1} \quad \text{og} \quad \mathcal{S}_2 = (\mathcal{H}_2 - \mathcal{I})(\mathcal{H}_2 + \mathcal{I})^{-1} \quad (6.177)$$

hvor det er forutsatt at $(\mathcal{H}_1 + \mathcal{I})^{-1}$ og $(\mathcal{H}_2 + \mathcal{I})^{-1}$ er veldefinerte. Da representerer

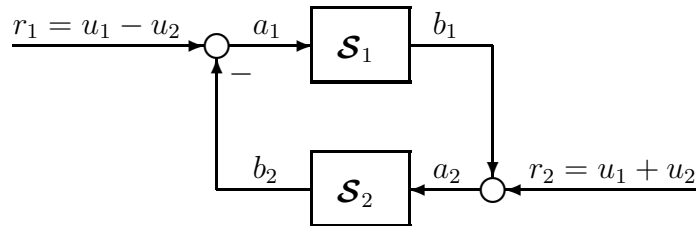
$$a_1 = r_1 - b_2 \quad (6.178)$$

$$a_2 = r_2 + b_1 \quad (6.179)$$

$$b_1 = \mathcal{S}_1 a_1 \quad (6.180)$$

$$b_2 = \mathcal{S}_2 a_2 \quad (6.181)$$

det samme tilbakekoblede system som ligningene (6.170)–(6.173). Systemet er vist i figur 6.18.



Figur 6.18: Spredningsrepresentasjon av tilbakekoblet prosess

Påstand 6.5 Gitt systemet (6.178)–(6.181). Anta at \mathcal{S}_1 har forsterkning mindre eller lik 1 og at \mathcal{S}_2 har forsterkning mindre enn 1, dvs. det fins en $\gamma' \in (0, 1)$ slik at

$$\|\mathcal{S}_1 a\|_T^2 \leq \|a\|_T^2 \quad (6.182)$$

$$\|\mathcal{S}_2 a\|_T^2 \leq (1 - \gamma') \|a\|_T^2 \quad (6.183)$$

for alle $a \in L_{2e}$ og alle $T \geq 0$. Da er systemet L_2 -stabil.

Bevis: Fra påstand 6.4 følger det at under de angitte forutsetninger er

$$\langle u, \mathcal{H}_1 u \rangle_T \geq 0$$

det eksisterer konstanter $\delta > 0$ og $\gamma > 0$ slik at $\langle u, \mathcal{H}_2 u \rangle_T \geq \delta \|u\|_T^2$ og i tillegg at $\|\mathcal{H}_2 u\|_T \leq \gamma \|u\|_T$ for alle $u \in L_{2e}$ og alle $T \geq 0$. L_2 -stabilitet følger dermed av korollar 6.5 \blacksquare

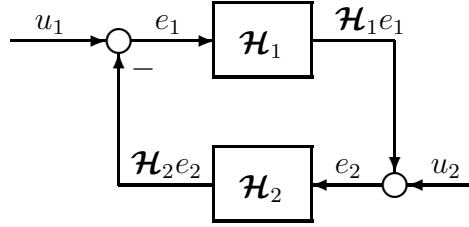
Til slutt skal vi ta med et viktig teorem om liten forsterkning.

Teorem 6.4 (Liten forsterkning) Gitt et tilbakekoblet system hvor forovergrenen er gitt av en operator $\mathcal{H}_1 : L_{2e} \rightarrow L_{2e}$ og tilbakekoblingsgrenen med en operator $\mathcal{H}_2 : L_{2e} \rightarrow L_{2e}$ slik at

$$e_1 = u_1 - \mathcal{H}_2 e_2 \quad (6.184)$$

$$e_2 = u_2 + \mathcal{H}_1 e_1 \quad (6.185)$$

som vist i figur 6.19.



Figur 6.19: Tilbakekoblet prosess

Anta at det fins konstanter $\beta_1, \beta_2, \gamma_1 \geq 0$ og $\gamma_2 \geq 0$ slik at

$$\|\mathcal{H}_1 e_1\|_T \leq \gamma_1 \|e_1\|_T + \beta_1 \quad (6.186)$$

$$\|\mathcal{H}_2 e_2\|_T \leq \gamma_2 \|e_2\|_T + \beta_2 \quad (6.187)$$

for alle $e_1, e_2 \in L_{2e}$ og alle $T \geq 0$. Da gjelder: Hvis $\gamma_1 \gamma_2 < 1$, så

1.

$$\|e_1\|_T \leq (1 - \gamma_1 \gamma_2)^{-1} (\|u_1\|_T + \gamma_2 \|u_2\|_T + \beta_2 + \gamma_2 \beta_1) \quad (6.188)$$

$$\|e_2\|_T \leq (1 - \gamma_1 \gamma_2)^{-1} (\|u_2\|_T + \gamma_1 \|u_1\|_T + \beta_1 + \gamma_1 \beta_2) \quad (6.189)$$

2. Hvis $\beta_1 = \beta_2 = 0$ så er systemet L_2 -stabilt.

Bevis: Trekantulikheten gir

$$\|e_1\|_T \leq \|u_1\|_T + \|\mathcal{H}_2 e_2\|_T \leq \|u_1\|_T + \gamma_2 \|e_2\|_T + \beta_2 \quad (6.190)$$

og

$$\|e_2\|_T \leq \|u_2\|_T + \|\mathcal{H}_1 e_1\|_T \leq \|u_2\|_T + \gamma_1 \|e_1\|_T + \beta_1 \quad (6.191)$$

Ved å sette inn ulikheten (6.191) for $\|e_2\|_T$ inn i (6.190) og sette inn ulikheten (6.190) for $\|e_1\|_T$ inn i (6.191) oppnås (6.188) og (6.189).

L_2 -stabilitet påvises etter litt regning fra (6.188) og (6.189) når $\beta_1 = \beta_2 = 0$. \blacksquare

Eksempel 6.12 For et lineært system

$$y(s) = h_1(s)u(s)$$

og tilbakekobling

$$u = h_2(s)[y_0(s) - y(s)]$$

kan vi skrive systemet på formen (6.184,6.185) ved å la operatoren $\mathcal{H}_1 : L_{2e} \rightarrow L_{2e}$ representere prosessen, mens operatoren $\mathcal{H}_2 : L_{2e} \rightarrow L_{2e}$ representerer tilbakekoblingen. Da er

$$e = y_0 - \mathcal{H}_1 u \quad (6.192)$$

$$u = \mathcal{H}_2 e \quad (6.193)$$

Forsterkningen til operatorene finnes av

$$\|\mathcal{H}_1 u\|_T \leq \gamma_1 \|u\|_T + \beta_1 \quad (6.194)$$

$$\|\mathcal{H}_2 e\|_T \leq \gamma_2 \|e\|_T + \beta_2 \quad (6.195)$$

hvor $\gamma_1 = \max_{\omega} |h_1(j\omega)|$ og $\gamma_2 = \max_{\omega} |h_2(j\omega)|$. Videre kan man oppnå $\beta_1 = 0$ og $\beta_2 = 0$ ved passende valg av initialbetingelser, og siden systemet er lineært vil stabilitetsegenskaper funnet for disse initialbetingelsene også gjelde for alle andre initialbetingelser.

Ifølge teoremet om liten forsterkning er det lukkede systemet L_2 -stabilt hvis $\gamma_1 \gamma_2 < 1$. Siden systemet er lineært er L_2 -stabilitet ekvivalent med BIBO-stabilitet.

For å se hva dette tilsvarer i frekvensanalysen betrakter vi absoluttverdien til sløyfe-transferfunksjonen $h_0 = h_1 h_2$. Maksimalverdien oppfylder

$$\max_{\omega} |h_0(j\omega)| \leq \max_{\omega} |h_1(j\omega)| \cdot \max_{\omega} |h_2(j\omega)| = \gamma_1 \gamma_2 \quad (6.196)$$

Dette betyr at

$$\gamma_1 \gamma_2 < 1 \Rightarrow \max_{\omega} |h_0(j\omega)| < 1 \quad (6.197)$$

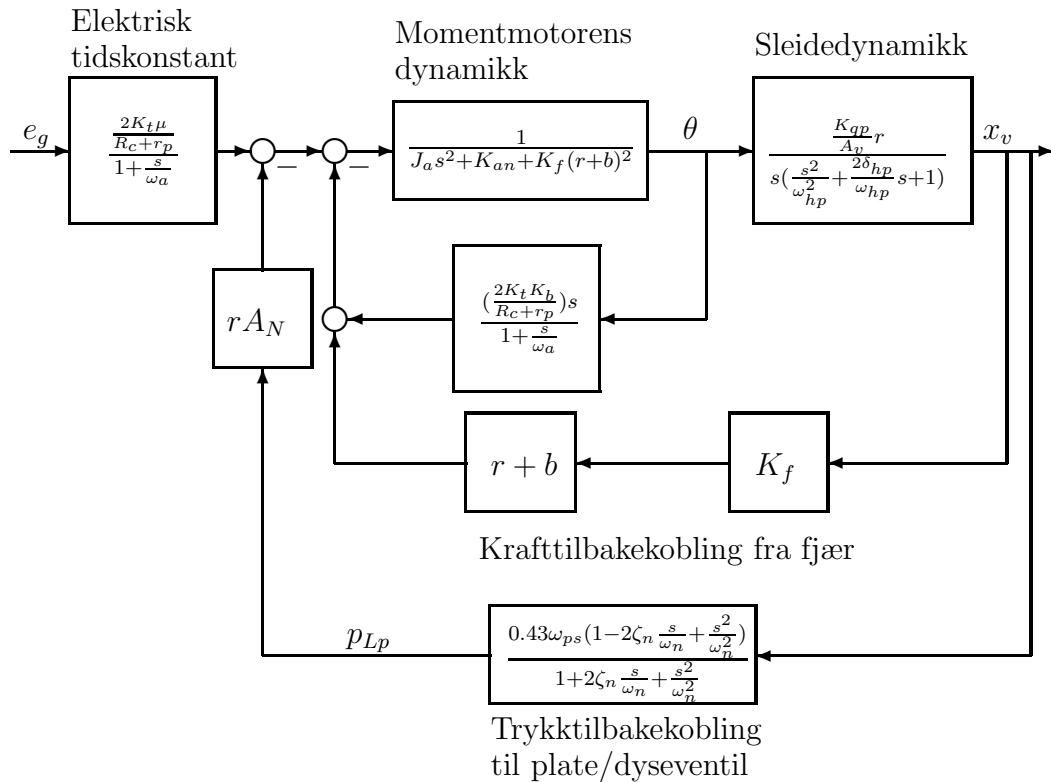
I Nyquistdiagrammet tilsvarer dette at stedkurven til $h_0(j\omega)$ ligger innenfor enhetsirkelen for alle ω , mens i Nicholsdiagrammet tilsvarer det at stedkurven ligger under 0 dB-linjen for alle ω . Hvis alle polene er i det lukkede venstre halvplan, er systemet dermed stabilt ifølge Nyquists teorem. ■

Eksempel 6.13 Teoremet om liten forsterkning er nyttig i forbindelse med forstyrrende sløyfer som oppstår i systemet og som betraktes som usikkerhet eller forstyrrelser. Denne typen sløyfer skal gi minst mulig innvirkning på systemet, og må ikke forårsake ustabilitet. Et eksempel på denne type uønsket sløyfe finner man i tottrinns elektrohydrauliske servoventiler hvor første trinn er en plate/dyse-ventil [24]. Pådrag er styrespenningen e_g , mens måling er sleideposisjon x_v i ventilens andre trinn. Man ønsker at sleideposisjonen x_v skal være proporsjonal med inngangen e_g .

Dynamikken til ventilen er vist i figur 6.20 og er gitt av

$$x_v(s) = \frac{\frac{2\mu K_t}{(R_c + r_p)(r+b)K_f}}{\left(1 + \frac{s}{K_{vf}}\right)\left(1 + \frac{s}{\omega_a}\right)\left(1 + 2\zeta_{mf}\frac{s}{\omega_{mf}} + \frac{s^2}{\omega_{mf}^2}\right)} e_g(s) \quad (6.198)$$

$$+ \frac{\frac{rA_N}{(r+b)K_f}}{\left(1 + \frac{s}{K_{vf}}\right)\left(1 + 2\zeta_{mf}\frac{s}{\omega_{mf}} + \frac{s^2}{\omega_{mf}^2}\right)} p_{Lp}(s) \quad (6.199)$$



Figur 6.20: Totrinns elektrohydraulisk servoventil. Ventilen konstrueres slik at forsterkningen er mindre enn 1 i sløyfen som oppstår på grunn av trykktilbakekobling fra lasttrykket p_{Lp} over plate/dyse-ventilen, slik at denne sløyfen gir ustabilitet. I tillegg har sløyfen så lav forsterkning at man kan se bort fra den.

hvor p_{Lp} er lasttrykket over plate/dyse-ventilen, og konstanter er som definert i [24].

Her er innvirkningen av lasttrykket p_{Lp} over plate/dyse-ventilen å betrakte som en forstyrrelse som reduserer nøyaktigheten i systemet. Vi kan imidlertid ikke betrakte p_{Lp} som en forstyrrelse i stabilitetsanalysen siden vi har en tilbakekobling til plate/dyse-ventilens lasttrykk gitt ved

$$p_{Lp}(s) \approx \frac{0.43\omega_p s (1 - 2\zeta_h \frac{s}{\omega_h} + \frac{s^2}{\omega_h^2})}{1 + 2\zeta_h \frac{s}{\omega_h} + \frac{s^2}{\omega_h^2}} x_v(s) \quad (6.200)$$

Imidlertid ser vi at for sløyfen som oppstår på grunn av p_{Lp} så har forovergrenen som gitt av (6.198) begrenset forsterkning ifølge

$$\left| \frac{x_v(j\omega)}{p_{Lp}} \right| \leq \frac{rA_N}{(r+b)K_f} \triangleq \gamma_1 \quad (6.201)$$

mens for tilbakekoblingen (6.200) er begrensingen i forsterkning gitt av

$$\left| \frac{p_{Lp}(j\omega)}{x_v} \right| \leq \frac{0.43\omega_p s}{A_v} \triangleq \gamma_2 \quad (6.202)$$

Dermed følger det av teoremet om liten forsterkning at hvis

$$\gamma_1 \gamma_2 = \frac{rA_N}{(r+b)K_f} \frac{0.43\omega_p s}{A_v} < 1 \quad (6.203)$$

så er stabilitet sikret for sløyfen som oppstår på grunn av tilbakekoblingen til plate/dyse-ventilens lasttrykk. Siden sløyfen i tillegg har forsterkning mindre enn 1, vil den ha liten innvirkning på systemets dynamikk, og vi kan bruke tilnærmelsen

$$x_v(s) = \frac{\frac{2\mu K_t}{(R_c+r_p)(r+b)K_f}}{\left(1 + \frac{s}{K_{vf}}\right)\left(1 + \frac{s}{\omega_a}\right)\left(1 + 2\zeta_{mf}\frac{s}{\omega_{mf}} + \frac{s^2}{\omega_{mf}^2}\right)} e_g(s) \quad (6.204)$$

■

Kapittel 7

Mekaniske resonanser

7.1 Innledning

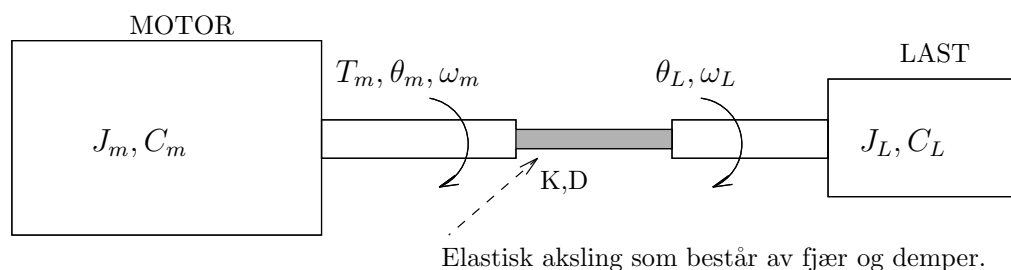
I alle servomekanismer har lastens egenskaper og dynamikk stor betydning for systemets egenskaper. I det enkleste tilfellet er lasten bare et treghetsmoment og en viskøs demper. I mange tilfeller har imidlertid lasten sin egen dynamikk som man må ta hensyn til under regulatorutvikling.

Et ofte forekommende problem er at lasten inneholder mekaniske svingesystemer som skyldes samspill mellom treghetskrefter, fjæring og demping i lasten. Dette gir mekaniske resonanser i systemet. I dette kapittelet omhandles servosystemer med mekaniske resonanser.

7.2 Motor med last og elastisk gir

7.2.1 Transferfunksjoner

En type system som ofte forekommer er en motor som driver et treghetsmoment over en elastisk girooverføring (fig. 7.1). Anta for enkelhets skyld at giroversetningen er $n = 1$.



Figur 7.1: Motor som driver en last over en elastisk overføring

Motoren har treghetsmoment J_m , lasten har treghetsmoment J_L , mens overføringen har en fjærkonstant K og en dempingskoeffisient D . Motoren har tørr friksjon gitt ved $C_m \text{sgn}(\omega_m)$, mens lasten har tørr friksjon lik $C_L \text{sgn}(\omega_L)$. Det antas i første omgang at $C_m = C_L = 0$.

Bevegelsesligningen for motoren er

$$J_m \ddot{\theta}_m = T_m - T_L \quad (7.1)$$

hvor θ_m er motorvinkelen, T_m er motormomentet som er pådraget, og T_L er kontaktmomentet på overføringen. Bevegelsesligningen for lasten er

$$J_L(\ddot{\theta}_m + \Delta\ddot{\theta}) = T_L \quad (7.2)$$

hvor lastens vinkel θ_L er skrevet som

$$\theta_L = \theta_m + \Delta\theta \quad (7.3)$$

Kontaktmomentet er gitt av

$$T_L = -D\Delta\dot{\theta} - K\Delta\theta \quad (7.4)$$

hvor K er fjærkonstanten og D er dempekoeffisienten. Bevegelsesligningen for lasten kan da skrives:

$$J_L(\ddot{\theta}_m + \Delta\ddot{\theta}) = -D\Delta\dot{\theta} - K\Delta\theta \quad (7.5)$$

som gir

$$\Delta\theta(s) = -\frac{J_L s^2 \theta_m(s)}{J_L s^2 + Ds + K} \quad (7.6)$$

eller

$$\Delta\theta(s) = -\frac{\frac{s^2}{\Omega_1^2}}{1 + 2Z\frac{s}{\Omega_1} + \frac{s^2}{\Omega_1^2}}\theta_m(s) \quad (7.7)$$

hvor

$$\Omega_1^2 = \frac{K}{J_L} \quad (7.8)$$

og

$$\frac{2Z}{\Omega_1} = \frac{D}{K} \quad (7.9)$$

Frekvensen Ω_1 er den udempede resonansfrekvensen og Z er relativ demping for lasten når motorakslingen er låst. Ω_1 og Z betegnes derfor ofte **begrenset udempet resonansfrekvens** og **begrenset relativ demping**.

Ved å addere bevegelsesligningene for motor og last fås

$$J_m \ddot{\theta}_m + J_L(\ddot{\theta}_m + \Delta\ddot{\theta}) = T_m \quad (7.10)$$

Ved å sette inn for $\Delta\theta(s)$ fås

$$(J_m + J_L)s^2\theta_m(s) - J_L s^2 \frac{\frac{s^2}{\Omega_1^2}}{1 + 2Z\frac{s}{\Omega_1} + \frac{s^2}{\Omega_1^2}}\theta_m(s) = T_m(s) \quad (7.11)$$

som gir

$$\theta_m(s) = \frac{T_m(s)}{J s^2} + \frac{J_L}{J} \frac{\frac{s^2}{\Omega_1^2}}{1 + 2Z\frac{s}{\Omega_1} + \frac{s^2}{\Omega_1^2}}\theta_m(s) \quad (7.12)$$

hvor

$$J = J_m + J_L \quad (7.13)$$

er det totale treghetsmoment. Denne ligningen betegnes gjerne **systemets bevegelsesligning på begrenset form**.

Den begrensede formuleringen av bevegelsesligningen er implisitt i θ_m . Den eksplisitte løsningen er

$$\frac{\theta_m}{T_m}(s) = \frac{1 + 2Z\frac{s}{\Omega_1} + \frac{s^2}{\Omega_1^2}}{Js^2(1 + 2\zeta\frac{s}{\omega_1} + \frac{s^2}{\omega_1^2})} \quad (7.14)$$

hvor

$$\omega_1^2 = \frac{1}{1 - \frac{J_L}{J}}\Omega_1^2 = \frac{J}{J_m}\Omega_1^2 \quad (7.15)$$

og

$$\zeta = \sqrt{\frac{J}{J_m}}Z \quad (7.16)$$

som er **ubegrenset resonansfrekvens** og **ubegrenset relativ demping**. Her er $\Omega_1 < \omega_1$. Dette betyr at elastisiteten resulterer i et nullpunktpar med udempet resonansfrekvens Ω_1 og et polpar med den noe høyere udempede resonansfrekvensen ω_1 . Frekvensresponsen er vist i fig. 7.2 med parameterne $K = 20$, $J_m = 20$, $J_L = 15$ og $D = 0.5$. Legg merke til at elastisiteten ikke gir noe negativt fasebidrag selv for frekvenser over ω_1 . ω_1 og ζ avhenger av treghetsmomentet til både motor og last, mens de begrensede parameterne Ω_1 og Z er kun avhengig av lastens treghet.

Ved å sette lign. (7.14) inn i lign. (7.7) fås

$$\frac{\Delta\theta}{T_m}(s) = -\frac{1}{J} \frac{\frac{1}{\Omega_1^2}}{1 + 2\zeta\frac{s}{\omega_1} + \frac{s^2}{\omega_1^2}} = -\frac{1}{K} \frac{J_L}{J} \frac{1}{1 + 2\zeta\frac{s}{\omega_1} + \frac{s^2}{\omega_1^2}} \quad (7.17)$$

Videre kan $\frac{\theta_L}{T_m}(s)$ finnes av

$$\theta_L = \theta_m + \Delta\theta \quad (7.18)$$

som gir

$$\frac{\theta_L}{T_m}(s) = \frac{1 + 2Z\frac{s}{\Omega_1}}{Js^2(1 + 2\zeta\frac{s}{\omega_1} + \frac{s^2}{\omega_1^2})} \quad (7.19)$$

Frekvensresponsen er vist i figur 7.3. I dette tilfelle resulterer elastisiteten i negativt fasebidrag for frekvenser over ω_1 .

Eksempel 7.1 Det er vanlig å dimensjonere systemet slik at $J_m = J_L$. Da er

$$\Omega_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\omega_1 = 0.707\omega_1 \quad (7.20)$$

■

Eksempel 7.2 Anta $Z = 0.1$ og $J_m = J_L$. I så fall er

$$\frac{\theta_L}{T_m}(s) = \frac{1 + \frac{s}{3.535\omega_1}}{Js^2(1 + 2\zeta\frac{s}{\omega_1} + \frac{s^2}{\omega_1^2})} \quad (7.21)$$

■

Figur 7.2: Bodediagram for transferfunksjonen θ_m/T_m fra motormoment til motorvinkel

Ut fra det foregående finnes transferfunksjonen fra motorvinkelen til lastvinkelen å være

$$\frac{\theta_L}{\theta_m}(s) = \frac{1 + 2Z\frac{s}{\Omega_1}}{1 + 2Z\frac{s}{\Omega_1} + \frac{s^2}{\Omega_1^2}} \quad (7.22)$$

som har knekkfrekvens for $\omega = \Omega_1$. Frekvensresponsen er vist i figur 7.4.

7.2.2 Energibetraktning

I kapittel 7.2.1 ble det vist at dynamikk som skyldes elastisitet i lasten ikke gir negativ fase i transferfunksjonen fra motormoment til motorvinkel. Vi skal se at dette skyldes systemets passivitetsegenskaper.

Motoren og lasten i kapittel 7.2.1 har modellen

$$J_m \dot{\omega}_m = T_m - T_L \quad (7.23)$$

$$J_L \dot{\omega}_L = T_L \quad (7.24)$$

$$T_L = -D\Delta\omega - K\Delta\theta \quad (7.25)$$

$$\Delta\omega = \omega_L - \omega_m, \quad \Delta\theta = \theta_L - \theta_m \quad (7.26)$$

Summen av kinetisk og potensiell energi for motor og last er

$$V(t) = \frac{1}{2}J_m\omega_m^2(t) + \frac{1}{2}J_L\omega_L^2(t) + \frac{1}{2}K[\Delta\theta(t)]^2 \quad (7.27)$$

Figur 7.3: Bodediagram for transferfunksjonen θ_L/T_m fra motormoment til lastvinkel

Energibalansen for systemet kan uttrykkes slik: **Endring av kinetisk og potensiell energi pr. tidsenhet er lik tilført effekt minus effekttap i systemet.** Dette kan formuleres matematisk som

$$\dot{V}(t) = \omega_m(t)T_m(t) - D[\Delta\omega(t)]^2 \quad (7.28)$$

hvor tilført effekt til systemet er $\omega_m(t)T_m(t)$. Dette er rotasjonsutgaven av definisjonen på mekanisk effekt som er kraft multiplisert med hastighet. Effekttap i systemet er $D[\Delta\omega(t)]^2$.

Vi kan nå slå fast:

1. Energien $V(t)$ som gitt i lign. (7.27) er større eller lik null.
2. Effekttapet for systemet bestående av motor, gir og last er

$$D[\Delta\omega(t)]^2 \geq 0 \quad (7.29)$$

som er effekt som utlades i den viskøse demperen. Effekttapet er derfor større eller lik null.

Det antas videre at totalenergien for $t = 0$ er endelig, dvs. $V(0) < \infty$. Dette betyr at

$$\int_0^\infty \omega_m(t)T_m(t)dt = V(\infty) - V(0) + \int_0^\infty D[\Delta\omega(t)]^2dt \geq -V(0) \quad (7.30)$$

Figur 7.4: Bodediagram for transferfunksjonen θ_L/θ_m fra motorvinkel til lastvinkel.

siden $V(\infty) \geq 0$ og $\int_0^\infty D[\Delta\omega(t)]^2 dt \geq 0$. Dermed har $\int_0^\infty \omega_m(t)T_m(t)dt$ en nedre begrensning $-V(0) > -\infty$.

Dette betyr at transferfunksjonen fra motormomentet til motorhastigheten

$$h_m(s) = \frac{\omega_m}{T_m}(s) \quad (7.31)$$

er passiv, og det følger at

$$\operatorname{Re}[h_m(j\omega)] \geq 0 \quad \text{for alle } \omega \quad (7.32)$$

Ut fra en ren energibetraktning for motor med gir og last har vi dermed vist at transferfunksjonen fra motormomentet til motorhastigheten har en fase

$$|\angle h_m(j\omega)| \leq 90^\circ \quad (7.33)$$

hvilket vil si at

$$-180^\circ \leq \angle \frac{\theta_m}{T_m}(j\omega) \leq 0^\circ \quad (7.34)$$

som svarer til resultatet i kapittel 7.2.1.

7.3 Regulatorstruktur

Ulike tilbakekoblingsstrategier for en motor som driver en last over en elastisk overføring analyseres i det følgende. Systemet er som presentert i kapittel 7.2.1. Lasten skal følge

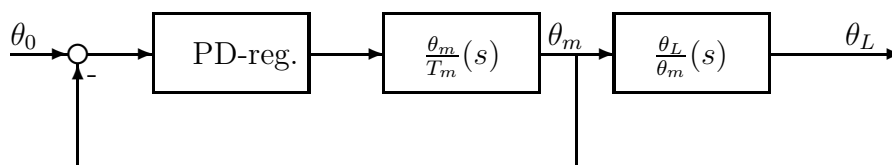
en posisjonsreferanse. Både motoren og lasten antas å ha tørr friksjon. Stoffet er hentet fra [28].

7.3.1 Tilbakekobling fra motorposisjonen

Som vi ser i fig. 7.2 er det kraftig resonans i $\theta_m(s)/T(s)$ ved frekvensen

$$\omega = \omega_1 \sqrt{1 - 2\zeta^2}$$

som er tilnærmet lik ω_1 dersom ζ er liten. Dette legger ingen begrensning på båndbredden i det lukkede systemet ved tilbakekobling fra motorposisjonen, fordi fasen aldri blir mindre enn -180° . Teoretisk er det mulig å oppnå en uendelig båndbredde i det lukkede systemet ved tilbakekobling fra motorposisjonen og bruk av PD-regulator med høy forsterkning. I virkeligheten er dette ikke mulig fordi umodellerte tidskonstanter vil bidra til at fasen blir mindre enn -180° for høye frekvenser, og dessuten vil det også være begrensninger i aktuatorens båndbredde. En benytter derfor en begrenset PD-regulator for å gi en tilstrekkelig fasemargin ved kryssfrekvensen uten å forsterke høyfrekvent målestøy.



Figur 7.5: Tilbakekobling fra θ_m

Den høye båndbredden i systemet gir god regulering av motorposisjonen, mens reguleringen av lastposisjonen ikke fungerer for frekvenser

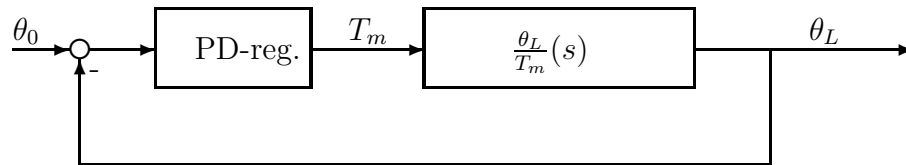
$$\omega > \Omega_1 \sqrt{1 - 2Z^2} \quad (7.35)$$

som vi kan se utfra figur 7.4 og 7.5. Selv om det er tørr friksjon i motoren, vil denne strategien gi lite stasjonært avvik i motorposisjonen, fordi det er mulig å ha stor forsterkning i regulatoren uten at systemet blir ustabil.

Dersom en istedenfor PD-regulator benytter en PID-regulator, vil det ikke bli noe stasjonært avvik i motorposisjonen, men systemet vil da bli betinget stabilt. Dette er ikke ønskelig i servosystemer fordi små endringer i systemparametere kan gi et ustabil system. Dessuten forsøker en å unngå bruk av integralvirkning i slike systemer, fordi det kan oppstå store oversving som følge av at integratoren lades ut etter at pådraget har vært i metning. Derfor bør ihvertfall I-leddet i regulatoren kobles ut ved store reguleringsavvik dersom PID-regulator benyttes. En annen ulempe med bruk av integralvirkning i regulatoren er at det kan oppstå uønskede grensesvingninger dersom det er slark eller stiksjon i systemet.

Fordi det ikke er noen tilbakekobling fra lastens posisjon vil det kunne oppstå et avvik mellom motorens og lastens posisjon pga. slark, tørr friksjon eller ytre krefter som virker inn på overføringen eller lasten. Det er derfor nødvendig å ha tilbakekobling fra lastens posisjon for å kunne regulere denne med ønsket nøyaktighet.

Det er interessant å merke seg at $\angle \frac{\omega_m}{T_m}(j\omega) \geq -90^\circ$. Systemet er derfor stabilt hvis en kobler tilbake fra ω_m og benytter en PID-regulator. Dette ser en også klart utfra frekvensresponsen.



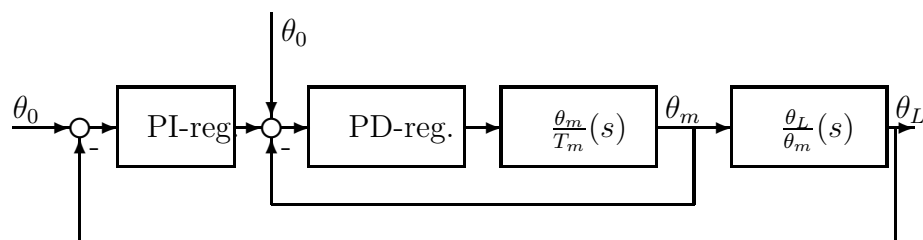
Figur 7.6: Tilbakekobling fra θ_L

7.3.2 Tilbakekobling fra lastposisjonen

Fig. 7.3 viser at det også i frekvensresponsen fra motormoment til lastvinkel er kraftig resonans ved frekvensen $\omega = \omega_1 \sqrt{1 - 2\zeta^2}$. Siden fasen her er mindre enn -180° for høye frekvenser, er kryssfrequensen i det lukkede systemet ved tilbakekobling fra lastposisjonen begrenset til $\omega_c < \omega_1$, dersom tilstrekkelig fasemargin skal oppnås.

Forsterkningen i regulatoren må reduseres vesentlig i forhold til det man kan oppnå ved tilbakekobling fra motorposisjonen. På den annen side kan det stasjonære avviket i lastposisjonen bli mindre enn ved tilbakekobling fra motorposisjonen hvis lasten påvirkes av ytre krefter eller det er tørr friksjon i systemet. En PID-regulator vil gi null stasjonært avvik, men kan også resultere i oscillatorisk innsvingning hvis det er metning eller dødgang i systemet. Tørr friksjon elimineres imidlertid effektivt med integralvirking. Oscillasjoner dempes i dette tilfelle ved at energi dissiperes som friksjonsvarme.

Siden $\angle \frac{\theta_L}{T_m}(j\omega) < -180^\circ \Rightarrow \angle \frac{\omega_L}{T_m}(j\omega) < -90^\circ$ for $\omega > \omega_1$, er systemet $T_m \mapsto \omega_L$ ikke passivt. Dette betyr imidlertid ikke at det er umulig å få et stabilt system ved tilbakekobling fra ω_L eller θ_L . Ved tilbakekobling fra lastposisjonen eller lastens hastighet, vil det bare være problemer med stabiliteten dersom forsterkningen er for høy i regulatoren slik at $\omega_c > \omega_{180}$.



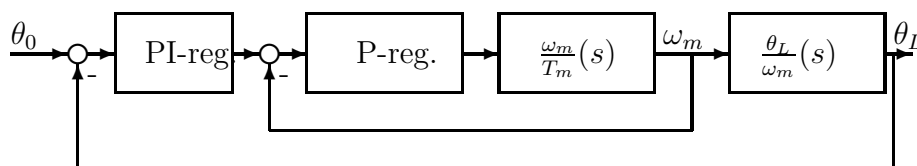
Figur 7.7: Tilbakekobling fra θ_L og θ_m

7.3.3 Tilbakekobling fra motor- og lastposisjon

For å kompensere for friksjon og forstyrrelser i motoren og i tillegg oppnå et lite stasjonært avvik i lastposisjonen, kan man benytte tilbakekobling fra både θ_m og θ_L

som vist i fig. 7.7. Det benyttes en begrenset PD-regulator i den indre sløyfen, mens det som vist i fig. 7.4 er mulig å benytte en PI-regulator i den ytre sløyfen uten at systemet blir betinget stabilt. Dette sikrer null stasjonært avvik, men båndbredden i det lukkede systemet er begrenset til $\omega_c < \Omega_1$.

Det er visse problemer med denne tilbakekoblingsstrukturen. På bakgrunn av passivitetsegenskapene til systemet er det klart at transferfunksjonen fra motormomentet T_m til motorvinkelen θ_m har fase større enn -180° . Ved tilbakekobling fra θ_m med en PD-regulator vil systemet alltid ha en positiv fasemargin, og det er dermed stabilt. Det viser seg imidlertid at fasemarginen kan bli svært liten hvis kryssfrekvensen til den indre sløyfen med tilbakekobling fra θ_m er større enn resonansfrekvensen. Hvis det er bare én resonansfrekvens, vil ikke dette skape problemer hvis kryssfrekvensen er vesentlig større enn resonansfrekvensen. I praksis vil det imidlertid ofte være mange resonansfrekvenser i området omkring kryssfrekvensen, og systemet kan bli meget oscillatorisk. For denne regulatorstrukturen vil derfor kryssfrekvensen i den indre sløyfen i praksis måtte være mindre enn første resonansfrekvens.



Figur 7.8: Tilbakekobling fra θ_L og ω_m

7.3.4 Intern tilbakekobling fra motorhastighet

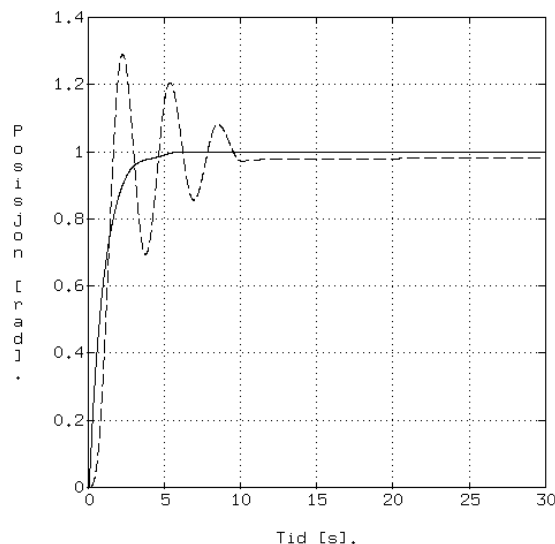
En bedre løsning kan oppnås ved å koble tilbake fra ω_m og θ_L som vist i fig. 7.8. Her kan man bruke en P-regulator med høy forsterkning i den indre sløyfen, mens det kan benyttes en PI-regulator i den ytre sløyfen. Båndbredden er begrenset til $\omega_c < \Omega_1$, som ved tilbakekobling fra θ_m og θ_L , og det stasjonære avviket blir null hvis I-virkning benyttes.

Med denne reguleringsstrategien er ikke kryssfrekvensen i den indre sløyfen begrenset av første resonansfrekvens.

7.3.5 Simuleringer

For å illustrere betydningen av tilbakekobling fra lastposisjonen dersom det er elastisitet i overføringen mellom motor og last, er sprangresponsen simulert med parameterne $K = 20$, $J_m = 20$, $J_L = 5$, $D = 0.5$, og tørrfriksjonen er gitt av $C_m = 1$ og $C_L = 0.5$. Det bør bemerkes at de parameterverdiene som er benyttet i dette eksemplet gir et system som er svært elastisk, og innsvingningstidene blir derfor store. Slike systemer illustrerer imidlertid betydningen av elastisitet i overføringen svært godt. Systemet ble simulert ved bruk av fjerdeordens Runge-Kutta (RK4).

Fig. 7.9 viser at det er vanskelig å regulere lastposisjonen bare ved tilbakekobling fra motorposisjonen, når det er elastisitet i overføringen. Selv om det er tørr friksjon



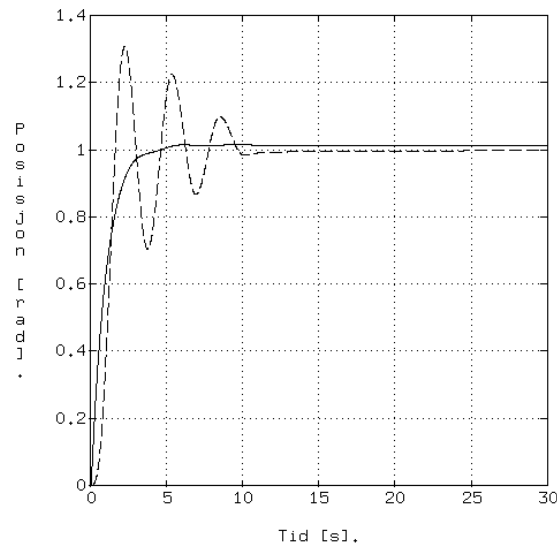
Figur 7.9: Motorposisjon (heltrukken kurve), og lastposisjon (stiplet kurve) ved tilbakekobling fra motorposisjonen ved bruk av PD-regulator ($T_d = 1$, $K_p = 500$).

i motoren blir det stasjonære avviket i motorposisjonen null. Dette skyldes den høye forsterkningen i regulatoren, som også ga høy båndbredde i motorens posisjonsreguleringssystem og dermed hurtig innsvingning av motorposisjonen. Det stasjonære avviket i lastposisjonen skyldes tørr friksjon som påvirker lasten, og som regulatoren ikke kan motvirke fordi det ikke er noen tilbakekobling fra lastposisjonen. Ved å sette ned forsterkningen i regulatoren kan oversvinget i lastposisjonen reduseres, men dette fører til lengre innsvingningstid. Dessuten vil det stasjonære avviket pga. tørr friksjon bli større.

Hvis man kobler tilbake fra både motorposisjonen og lastposisjonen er det mulig å regulere lastens posisjon som vist i fig. 7.10. Den indre sløyfen hadde den samme PD-regulatoren som ved simuleringen vist i fig. 7.9. En PI-regulator ble benyttet i den ytre sløyfen som vist i fig. 7.7. Systemet svinger seg inn like raskt som ved tilbakekobling bare fra motorposisjonen, men i dette tilfelle elimineres stasjonært avvik i lastposisjonen. Oversvinget i lastposisjonen kan reduseres ved å sette ned forsterkningene i regulatorene, og dette vil ikke gi stasjonært avvik fordi integralvirkning benyttes. Innsvingningstiden vil imidlertid bli større.

Utfra de foregående avsnittene kan en trekke følgende konklusjoner:

- Ved tilbakekobling fra motorhastigheten med P-regulator eller begrenset PI-regulator er systemet alltid stabilt med god fasemargin.
- Ved tilbakekobling fra motorvinkel er systemet stabilt ved bruk av PD-regulator. Fasemarginen kan imidlertid bli meget liten.
- Det kan oppstå stabilitetsproblemer dersom det benyttes for høy forsterkning i regulatoren ved tilbakekobling fra lastposisjonen. Denne tilbakekoblingsstrategien gir imidlertid nøyaktig posisjonering av lasten, og må benyttes dersom det er signifikant slark eller friksjon i overføringen.



Figur 7.10: Motorposisjon (heltrukken linje) og lastposisjon ved tilbakekobling fra θ_m og θ_L , og bruk av PI-regulator ($T_i = 10$, $K_{pi} = 0.15$) i den ytre sløyfen

- Tilbakekobling fra både θ_m og θ_L , eller ω_m og θ_L , gir et reguleringsystem som eliminerer tørr friksjon og forstyrrelser i motoren, og som dessuten gir nøyaktig posisjonering av lasten.
- Systemene $T_m \mapsto \theta_m$, $T_m \mapsto \omega_L$ og $T_m \mapsto \theta_L$ er ikke passive, og en kan ikke si noe om stabiliteten til disse systemene ved bruk av ulike reguleringsstrategier direkte utfra passivitetsteori. Siden $\frac{\theta_m}{\omega_m}(s) = \frac{1}{s}$ er imidlertid $\angle \frac{\theta_m}{T_m}(j\omega) \geq 180^\circ$ fordi systemet $T_m \mapsto \omega_m$ er passivt.
- Båndbredden i motorens posisjonsreguleringsystem er bare begrenset av motorens båndbredde. I praksis kan imidlertid fasemarginen bli liten hvis posisjonssløyfen fra motorvinkelen har kryssfrekvens over første resonansfrekvens.
- Båndbredden i lastens posisjonsreguleringsystem er begrenset til $\omega_c < \omega_1$ uansett lineær tilbakekoblingsstrategi. Dette er en egenskap ved systemet som bare kan forandres ved å øke stivheten i overføringen.
- I mange tilfeller vil J_L variere, slik som f.eks. i et ledd i en robotmanipulator der J_L er avhengig av leddvinkelen. Det er imidlertid mulig å finne en øvre og nedre grense for J_L i dette tilfellet. Fordi Ω_1 , Z , ω_1 og ζ avtar når J_L øker, må regulatorene dimensjoneres utfra $J_L = J_{L\max}$, for å unngå at systemet blir ustabil ved variasjoner i treghetsmomentet av lasten.

7.4 Systemer med flere mekaniske resonanser

7.4.1 Passivitetsanalyse

Anta at en motor driver en last med n treghetsmomenter som er forbundet med fjærer og dempere. Motormomentet T_m er pådraget til systemet, og motorakslingens hastighet

ω_m betraktes som systemets måling. Energien i systemet er

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{2}J_m\omega_m^2 + \frac{1}{2}K_{01}(\theta_m - \theta_{L1})^2 \\ &+ \frac{1}{2}J_{L1}\omega_{L1}^2 + \frac{1}{2}K_{12}(\theta_{L1} - \theta_{L2})^2 + \dots \\ &+ \frac{1}{2}J_{L,n-1}\omega_{L,n-1}^2 + \frac{1}{2}K_{n-1,n}(\theta_{L,n-1} - \theta_{Ln})^2 \\ &+ \frac{1}{2}J_{Ln}\omega_{Ln}^2 \end{aligned} \quad (7.36)$$

som er større eller lik null. Her er J_m motorens treghetsmoment, ω_{Li} er vinkelhastigheten til treghetsmomentet J_{Li} , $K_{i-1,i}$ og $D_{i-1,i}$ er henholdsvis fjærkonstant og dempekoeffisient for overføringen mellom treghetsmoment $i - 1$ og i , og $i \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Systemet oppfylder dermed ligningen

$$\dot{V} = T_m\omega_m - g \quad (7.37)$$

hvor

$$g(t) = D_{12}(\omega_{L1} - \omega_{L2})^2 + \dots + D_{n-1,n}(\omega_{L,n-1} - \omega_{Ln})^2 \geq 0 \quad (7.38)$$

representerer effekten som utlades i demperne, hvilket betyr at systemet er passivt.

Anta at systemet er lineært. Transferfunksjonen fra motormoment til motorhastighet er

$$h_m(s) = \frac{\omega_m}{T_m}(s) \quad (7.39)$$

Da gjelder

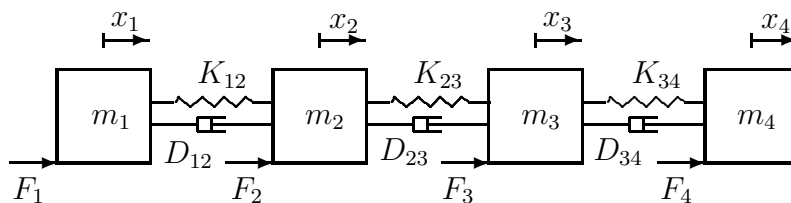
$$|\angle h_m(j\omega)| \leq 90^\circ \quad \text{for alle } \omega \quad (7.40)$$

Dette er et meget sterkt resultat. Den eneste informasjon man har om systemet er at det er lineært og at lasten består av passive mekaniske komponenter. På bakgrunn av dette kan en slutte at transferfunksjonen fra motormomentet til motorhastigheten har fase med absoluttverdi mindre eller lik 90° med ekte ulikhet hvis det er demping i lasten.

7.4.2 Modell for system med tre resonanser

For å undersøke dette fenomenet nærmere betraktes et system av fire masser som er koblet sammen i en serie med fjærer og dempere som vist i figur 7.11. Følgende tallverdier er gitt:

m_1	1kg
m_2	1kg
m_3	1kg
m_4	1kg
K_{12}	1N/m
K_{23}	1N/m
K_{34}	1N/m
D_{12}	0.1Ns/m
D_{23}	0.1Ns/m
D_{34}	0.1Ns/m



Figur 7.11: Mekanisk system bestående av fire masser koblet sammen i serie med fjærer og dempere.

hvor m_i er masse i , $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, K_{12} og D_{12} er henholdsvis fjærkonstant og dempekoeffisient mellom masse 1 og 2, osv.

Pådraget til systemet er en kraft som virker på en av massene 1,2,3,4, mens målingen er hastigheten av en av massene 1,2,3,4. Her skal ulike kombinasjoner av pådrag og målinger undersøkes.

Bevegelsesligningen for systemet er

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{F} \quad (7.41)$$

hvor

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix}^T \quad (7.42)$$

er posisjonsvektoren til de fire massene, massematrisen er

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_4 \end{pmatrix} \quad (7.43)$$

Dempematriksen er

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} D_{12} & -D_{12} & 0 & 0 \\ -D_{12} & D_{12} + D_{23} & -D_{23} & 0 \\ 0 & -D_{23} & D_{23} + D_{34} & -D_{34} \\ 0 & 0 & -D_{34} & D_{34} \end{pmatrix} \quad (7.44)$$

Stivhetsmatrisen er

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} K_{12} & -K_{12} & 0 & 0 \\ -K_{12} & K_{12} + K_{23} & -K_{23} & 0 \\ 0 & -K_{23} & K_{23} + K_{34} & -K_{34} \\ 0 & 0 & -K_{34} & K_{34} \end{pmatrix} \quad (7.45)$$

mens kreftene som virker på de fire massene er

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} F_1 & F_2 & F_3 & F_4 \end{pmatrix}^T \quad (7.46)$$

Pådrag for systemet er kraften F_2 som virker på masse 2. Transferfunksjoner til henholdsvis \dot{x}_2 , \dot{x}_3 og \dot{x}_4 er vist i figur 7.12 til 7.14. Legg merke til at med F_2 som pådrag og \dot{x}_2 som måling er systemet passivt, og fasen er større enn -90° .

Figur 7.12: Bodediagram for transferfunksjon fra $F_2(s)$ til $\dot{x}_2(s)$. Transferfunksjonen er passiv, og fasen går ikke under -90° .

7.4.3 Regulatorstruktur for system med mange resonanser

Ved konstruksjon av den mekaniske delen av en servomekanisme er det gjerne spesifisert at mekaniske resonanser skal ligge over en gitt frekvens. For en typisk industrirobot vil nedre grense for resonansfrekvenser ligge på omkring 1 rad/s (6.28 Hz). Optimalisering av den mekaniske konstruksjonen med hensyn på f.eks. vekt vil gjerne føre til at det ikke bare er én resonans like over nedre grense, men flere. I det følgende skal vi se på hvilke konsekvenser dette har for valg av tilbakekobling.

Systemet i kapittel 7.4.2 skal reguleres med hastighets- og posisjonssløyfe. For å understreke at det her er tilbakekobling fra motorens posisjon og hastighet, innføres notasjonen $F_m = F_2$, $v_m = \dot{x}_2$ og $x_m = x_2$. Som tidligere kan vi slå fast at systemet med F_m som pådrag og v_m som måling er passivt, og følgelig har transferfunksjonen $h(s)$ definert ved

$$\frac{v_m}{F_m}(s) = h(s) \quad (7.47)$$

fase større eller lik -90° . Videre er

$$\frac{x_m}{F_m}(s) = \frac{1}{s}h(s) \quad (7.48)$$

Denne transferfunksjonen har alltid fase større eller lik -180° .

Figur 7.13: Bodediagram for transferfunksjon fra $F_2(s)$ til $\dot{x}_3(s)$. Transferfunksjonen er ikke passiv, og fasen går under -90° .

Posisjonen x_m skal styres ved tilbakekobling. Dette kan gjøres ved bruk av en PD-regulator, eller ved å bruke hastighetssløyfe inne i en posisjonssløyfe hvilket vi skal gjøre her.

Hastighetstilbakekoblingen er

$$F_m = K_1(v_0 - v_m) \quad (7.49)$$

hvor K_1 er forsterkningen i tilbakekoblingen, og v_0 er hastighetsreferansen. Posisjonssløyfen, som her er en ytre sløyfe, har regulatoren

$$v_0 = K_2(x_0 - x_m) \quad (7.50)$$

Siden prosessen $F_m \mapsto v_m$ er passiv, har $h(s)$ og dermed sløyfetransferfunksjonen $h_{0v}(s) = K_1 h(s)$ i hastighetssløyfen fase større eller lik -90° . Båndbredden i hastighetssløyfen er derfor ikke begrenset av de mekaniske resonansene. Det er åpenbart at kryssfrekvensen til hastighetssløyfen bør være størst mulig for å redusere innvirkningen av friksjon og umodellerte effekter i motoren.

I posisjonssløyfen er v_0 pådrag og x_m er måling. Sløyfetransferfunksjonen er dermed

$$h_{0p}(s) = M_v(s) \frac{K_2}{s} \quad (7.51)$$

Figur 7.14: Bodediagram for transferfunksjon fra $F_2(s)$ til $\dot{x}_4(s)$. Transferfunksjonen er ikke passiv, og fasen går under -90° .

hvor M_v er hastighetssløyfens følgeforhold definert ved

$$M_v(s) = \frac{h_{0v}(s)}{1 + h_{0v}(s)} \quad (7.52)$$

Fasen til følgeforholdet er

$$\angle M_v(j\omega) = \begin{cases} 0 & \text{hvis } |h_{0v}(j\omega)| \gg 1 \\ \angle h_{0v}(j\omega) & \text{hvis } |h_{0v}(j\omega)| \ll 1 \end{cases} \quad (7.53)$$

Fasen til følgeforholdet er dermed lik null for frekvenser opp til kryssfrekvensen unntatt omkring antiresonansene hvor det kan forekomme at $|h_{0v}(j\omega)| \ll 1$. Fasen til h_{0v} er alltid større enn -90° , og dette betyr at $\angle M_v(j\omega) > -90^\circ$.

Problemer kan oppstå hvis det er en kraftig antiresonans like under kryssfrekvensen i hastighetssløyfen. I så fall kan fasemarginen til posisjonssløyfen bli vilkårlig liten, og kraftige resonanser kan oppstå. En designregel er derfor:

Ved styring av et system med flere resonanser velges kryssfrekvensen til hastighetssløyfen høyest mulig, mens posisjonssløyfens kryssfrekvens legges under første resonansfrekvens.

Bodediagram for hastighetssløyfens frekvensrespons er vist i fig. 7.15 med $K_1 = 2.5$. Med denne forsterkningen krysser amplitudekurven 0 dB-linjen tre ganger mellom 0.4 rad/s og 3 rad/s.

Bodediagram for posisjonssløyfens frekvensrespons er vist i fig. 7.16 med $K_1 = K_2 = 2.5$. Amplituden skjærer 0 dB-linjen ved 2 rad/s med omkring 80° fasemargin, men den skjærer 0 dB-linjen også ved 0.6 rad/s hvor fasemarginen er bare 30° . Dette gir en resonans på 6 dB i følgeforholdet, og en resonans på 5.2 dB i avviksforholdet (fig. 7.17). Nicholsdiagrammet er vist i figur 7.18.

Figur 7.15: Bodediagram for hastighetsløyvens frekvensrespons

7.5 To motorer som driver en elastisk last

To motorer er forbundet over en last bestående av treghetsmomenter, fjærer og dempere som vist i figur 7.19. Den ene motoren har treghetsmoment J_1 , vinkel q_1 og motormoment T_1 . Motoren er forbundet til treghetsmomentet J_3 over en fjær med fjærkonstant K_1 og en demper med koeffisient D_1 . Den andre motoren har treghetsmoment J_2 , vinkel q_2 og motormoment T_2 . Motoren er forbundet til et treghetsmoment J_4 over en fjær med fjærkonstant K_2 og en demper med koeffisient D_2 . De to treghetsmomentene har vinkelutslag q_3 og q_4 , og er forbundet med et fjær/demper-system med koeffisienter K_3 og D_3 .

Systemet har totalenergi

$$V = \frac{1}{2}[J_1q_1^2 + J_2q_2^2 + J_3q_3^2 + J_4q_4^2 + K_1(q_1 - q_3)^2 + K_2(q_3 - q_4)^2 + K_3(q_2 - q_4)^2] \quad (7.54)$$

mens effektlikningen er

$$\dot{V} = T_1\dot{q}_1 + T_2\dot{q}_2 - D_1(\dot{q}_1 - \dot{q}_3)^2 + D_2(\dot{q}_3 - \dot{q}_4)^2 + D_3(\dot{q}_2 - \dot{q}_4)^2 \quad (7.55)$$

Dette systemet er multivariabelt siden det har to pådrag T_1 og T_2 og to utganger q_1 og q_2 . Teorien om passive systemer kan utvides til å gjelde også multivariable systemer, men vi skal bruke en annen fremgangsmåte her.

Et reguleringsystem skal gi null vinkelutslag $q_1 = q_2 = 0$. Systemet kan gjøres passivt med T_1 som pådrag og \dot{q}_1 som utgang ved å innføre regulatoren

$$T_2 = -K_{p2}q_2 - K_{v2}\dot{q}_2 \quad (7.56)$$

som resulterer i at motor 2 opptrer som et treghet/fjær/demper-system med treghetsmoment J_2 , fjærstivhet K_p og dempekoeffisient K_v . Systemet har da total energi

$$V = \frac{1}{2}[J_1q_1^2 + J_2q_2^2 + J_3q_3^2 + J_4q_4^2$$

Figur 7.16: Bodediagram for posisjonssløyfens frekvensrespons

$$+ K_1(q_1 - q_3)^2 + K_2(q_3 - q_4)^2 + K_3(q_2 - q_4)^2 + K_{p2}q_2^2] \quad (7.57)$$

mens effektlikningen er

$$\dot{V} = T_1\dot{q}_1 - D_1(\dot{q}_1 - \dot{q}_3)^2 - D_2(\dot{q}_3 - \dot{q}_4)^2 - D_3(\dot{q}_2 - \dot{q}_4)^2 - K_{v2}\dot{q}_2^2 \quad (7.58)$$

som oppfyller betingelsene for passivitet.

En strengt passiv regulator benyttes:

$$T_1(s) = K_{v1}\beta \frac{1 + T_i s}{1 + \beta T_i s} \dot{q}_1(s) = K_{v1} \left[1 + (\beta - 1) \frac{1}{1 + \beta T_i s} \right] s q_1(s) \quad (7.59)$$

Dette er en begrenset PI-regulator hvis \dot{q}_1 oppfattes som prosessens måling.

Det lukkede system vil nå være BIBO-stabilt uavhengig av valg av regulatorparametere. I praksis vil imidlertid umodellert dynamikk, effektbegrensninger og eventuelle kraftige resonanser begrense valg av regulatorparametere. Siden systemet er lineært kan det tolereres at fasen går under -180° for frekvenser over kryssfrequensen. Integralvirkning fra posisjon kan derfor inkluderes som følger: Det passive systemet drevet av motor 1 har fase større eller lik -90° . Ser vi på transferfunksjonen

$$h_p(s) = \frac{q_1}{T_1}(s) \quad (7.60)$$

så har den fase større eller lik -180° . Motoren kan derfor styres med integralvirkning på posisjon

$$T_1(s) = K_{p1} \frac{1 + T_i s}{T_i s} q_1(s) + K_{v1} s q_1 \quad (7.61)$$

I dette tilfelle må imidlertid integraltiden velges slik at integralvirkningen ikke gir for stort negativt fasebidrag ved kryssfrequensen.

Figur 7.17: Bodediagram for følgeforhold og avvikforhold for posisjonssløyfe.

7.6 Mer om energibetraktninger*

7.6.1 Motor med ulineær friksjon

Energibetraktninger viser seg å gi interessante resultater i forbindelse med passivitet. Vi skal her ta med enda et eksempel på bruk av energibetraktninger for et motorsystem.

En strømstyrt likestrømsmotor representeres ved den ulineære modellen

$$J\ddot{\theta} = -b(\dot{\theta}) + u \quad (7.62)$$

hvor J er treghetsmomentet, $b(\dot{\theta})$ er friksjonsmomentet og u er motormomentet som er pådraget.

Systemet skal stabiliseres om referansen $\theta_0 = 0$. Regulatoren

$$u = -K_1\theta - K_2\dot{\theta} \quad (7.63)$$

benyttes hvor K_1 og K_2 er positive konstanter.

Stabiliteten av systemet omkring arbeidspunktet kan studeres ved å linearisere modellen om null hastighet og posisjon. Det er imidlertid mulig å vise at systemet er stabilt om nullpunktet for alle posisjoner og hastigheter. Dette gjøres ved hjelp av energifunksjonen¹

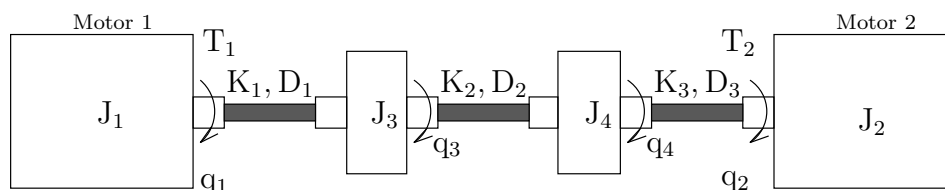
$$V = \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}K_1\theta^2 \quad (7.64)$$

Det første leddet er kinetisk energi. Det andre leddet representerer den potensielle energien som hadde vært lagret hvis proporsjonalvirkningen i regulatoren hadde vært implementert med en mekanisk fjær med fjærkonstant K_1 . Det er klart at V er større eller lik null, og at

$$\dot{V} = J\dot{\theta}\ddot{\theta} + K_1\theta\dot{\theta} \quad (7.65)$$

¹Denne analysen er basert på LaSalles teorem for invariante mengder [35].

Figur 7.18: Nicholsdiagram for følgeforhold for posisjonssløyfe. Fase og frekvens i diagrammet er gitt for følgeforholdet M .



Figur 7.19: To motorer som driver en last med to resonanser

Innsetting av lign. (7.62) gir

$$\dot{V} = -\dot{\theta}b(\dot{\theta}) - K_2\dot{\theta}^2 \quad (7.66)$$

Friksjonsmomentet virker alltid i motsatt retning av bevegelsen, og derfor er

$$\dot{\theta}b(\dot{\theta}) \geq 0 \quad \text{for alle } \dot{\theta} \quad (7.67)$$

Dermed er

$$\dot{V} < 0 \quad \text{for alle } \dot{\theta} \neq 0 \quad (7.68)$$

Siden \dot{V} er negativ for alle $\dot{\theta}$ vil V avta så lenge $\dot{\theta} \neq 0$. Spørsmålet er så: Kan systemet henge seg fast med $\dot{\theta} = 0$ i et punkt hvor $\theta \neq 0$? Dette viser seg å avhenge av $b(\dot{\theta})$.

1. Hvis $b(0) = 0$, så er

$$J\ddot{\theta} = -K_1\theta \quad (7.69)$$

når $\dot{\theta} = 0$, og systemet vil ha en akselerasjon for $\dot{\theta} = 0$ så lenge $\theta \neq 0$. Siden V avtar for $\theta = 0$ og systemet ikke kan bli hengende i noe punkt hvor $\theta \neq 0$, må systemet være asymptotisk stabilt om nullpunktet. Mer presist vil det for alle $\theta(t_0)$ og $\dot{\theta}(t_0)$ og alle $\delta_1 > 0$, $\delta_2 > 0$ eksistere en tid t_δ slik at $\theta(t_\delta) < \delta_1$ og $\dot{\theta}(t_\delta) < \delta_2$.

2. Hvis systemet har stiksjon og $b(0) \in [-b_0, b_0]$, så er

$$J\ddot{\theta} = -b(0) - K_1\dot{\theta} \quad (7.70)$$

når $\dot{\theta} = 0$. I dette tilfelle kan systemet falle til ro når

$$|\theta| \leq \frac{b_0}{K_1} \quad \text{og} \quad \dot{\theta} = 0 \quad (7.71)$$

7.6.2 Robotstyring med PD-regulatorer

Et interessant resultat finnes ved å anvende en lignende analyse på bruk av enkle PD-regulatorer for styring av en robotmanipulator. En robot med 6 ledd har bevegelsesligning

$$\mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \boldsymbol{\tau} \quad (7.72)$$

hvor $\mathbf{M}(\mathbf{q})$ er treghetsmatrisen med dimensjon 6×6 , \mathbf{q} er den 6-dimensjonale vektoren av leddvinkler, $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}}$ er en 6-dimensjonal vektor som representerer sentrifugalkrefter og Corioliskrefter, $\mathbf{g}(\mathbf{q})$ er vektoren av gravitasjonskrefter, og $\boldsymbol{\tau}$ er den 6-dimensjonale vektoren av motormomenter. En spesiell egenskap som gjelder for bevegelsesligningen på formen i lign. (7.72) er at treghetsmatrisen $\mathbf{M}(\mathbf{q})$ er en funksjon av armens posisjon \mathbf{q} .

Den kinetiske energien til armen er gitt av

$$T = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} \quad (7.73)$$

som tilsvarer $\frac{1}{2}mv^2$, som er kinetisk energi for en partikkel med masse m og hastighet v .

I det følgende settes for enkelhets skyld

$$\mathbf{g}(\mathbf{q}) = \mathbf{0}. \quad (7.74)$$

Effekten som tilføres armen er

$$\sum_{i=1}^6 \dot{q}_i \tau_i = \dot{\mathbf{q}}^T \boldsymbol{\tau} \quad (7.75)$$

Energibalansen blir dermed

$$\dot{T} = \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \right] = \dot{\mathbf{q}}^T \boldsymbol{\tau} \quad (7.76)$$

Vi kan nå vise at systemet er stabilt med en PD-regulator på hvert ledd:

$$\tau_i = -k_{pi}\Delta q_i - k_{vi}\dot{q}_i \quad (7.77)$$

hvor $\Delta q_i = q_i - q_{0i}$, q_{0i} er referansen til q_i og k_{pi} og k_{vi} er positive konstanter. På vektorform blir regulatoren

$$\boldsymbol{\tau} = -\mathbf{K}_p \Delta \mathbf{q} - \mathbf{K}_v \dot{\mathbf{q}} \quad (7.78)$$

hvor $\mathbf{K}_p = \text{diag}\{k_{pi}\}$ og $\mathbf{K}_v = \text{diag}\{k_{vi}\}$.

Vi innfører energifunksjonen

$$V = \frac{1}{2}[\dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} + \Delta \mathbf{q}^T \mathbf{K}_p \Delta \mathbf{q}] \quad (7.79)$$

som ville ha vært energien til systemet hvis regulatoren hadde vært realisert med fjærer og dempere. Den tidsderiverte av V er

$$\dot{V} = \dot{\mathbf{q}}^T \boldsymbol{\tau} + \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{K}_p \Delta \mathbf{q} \quad (7.80)$$

som forenkles til

$$\dot{V} = -\dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{K}_v \dot{\mathbf{q}} \leq 0 \quad (7.81)$$

Det viser seg her at \dot{V} er effekten som lades ut gjennom hastighetstilbakekoblingene. Dette betyr at hastighetstilbakekoblingen fungerer som elektroniske dempere.

Siden $\dot{V} \leq 0$ er det klart at V avtar mot en nedre grense. Spørsmålet er nå om systemet er asymptotisk stabilt. Systemet kan bare falle til ro når $\dot{V} = 0$ som skjer når

$$\dot{\mathbf{q}} = 0 \Rightarrow \ddot{\mathbf{q}} = -\mathbf{M}^{-1} \mathbf{K}_p \Delta \mathbf{q} \quad (7.82)$$

For at akselerasjonen skal være lik null slik at \dot{V} forblir null må $\Delta \mathbf{q} = \mathbf{0}$. Dette betyr at

$$\Delta \mathbf{q} = \mathbf{0}, \quad \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0} \quad (7.83)$$

er det eneste likevektspunktet til systemet. Dette betyr at systemet er globalt asymptotisk stabilt med PD-regulatorer med konstant forsterkning for hver motor.

Ut fra lign. 7.78 er det klart at posisjonstilbakekoblingen fungerer som fjærer med fjærkonstant k_{pi} , mens hastighetstilbakekoblingen fungerer som dempere med dempekoefisient k_{vi} . Intuitivt virker det fornuftig at hvis en robot påmonteres fjærer og dempere i leddene, så vil roboten gå til nullposisjonen til fjærene hvis ikke eksterne krefter eller friksjonskrefter virker.

7.7 Hydraulisk motor med elastisk last

7.7.1 Dynamisk modell

I en hydraulisk motor styres ikke motormomentet direkte, og vi skal i dette kapitlet utvikle modeller for en hydraulisk motor med elastisk last. En hydraulisk motor har en transferfunksjon fra pådrag til måling som består av et andreordens oscillatorisk system i serie med en åpen integrasjon fra hastighet til posisjon. Det andreordens oscillatoriske systemet representerer elastisiteten i oljen, men legg merke til at denne elastisiteten opptrer på en litt annen måte enn en mekanisk fjær. Elastisiteten i oljen gir dynamikk mellom oljestrøm og motorhastighet, mens en vanlig fjær gir dynamikk mellom motorvinkel og lastens vinkel.

Motoren har modellen

$$\frac{V_t}{4\beta} \dot{p}_L = -K_{ce} p_L - D_m \omega_m + K_q x_v \quad (7.84)$$

$$J_m \dot{\omega}_m = -B_m \omega_m + D_m p_L - T_L \quad (7.85)$$

hvor J_m er motorens treghetsmoment og notasjonen forøvrig er som i kapittel 3.3.3. Motoren driver som i kapittel 7.2.1 en last med treghetsmoment J_L over en motoraksling med fjærkonstant K og demping D . Momentet som virker på lasten er som i kapittel 7.2.1 gitt av

$$T_L = -D\Delta\omega - K\Delta\theta \quad (7.86)$$

hvor $\Delta\omega = \Delta\dot{\theta}$ og $\Delta\theta$ er vinkeldreiningen over fjæren. Bevegelsesligningen for lasten er

$$J_L(\dot{\omega}_m + \Delta\dot{\omega}) = -D\Delta\omega - K\Delta\theta \quad (7.87)$$

som gir

$$\Delta\theta(s) = -\frac{J_L}{J_L s^2 + Ds + K} s^2 \theta_m(s) \quad (7.88)$$

Ved å addere bevegelsesligningene for motor og last fås

$$J\ddot{\theta}_m + J_L\Delta\ddot{\theta} = -B_m\omega_m + D_m p_L \quad (7.89)$$

For enkelhets skyld settes $B_m = 0$. Innsetting av $\Delta\theta$ gir

$$\left(J - \frac{J_L}{J} \frac{\frac{s^2}{\Omega_1^2}}{1 + 2Z\frac{s}{\Omega_1} + \frac{s^2}{\Omega_1^2}}\right) s^2 \theta_m(s) = D_m p_L(s) \quad (7.90)$$

hvor Ω_1 og Z er gitt av lign. (7.8) og (7.9).

Så langt er utledningen i hovedtrekk den samme som i kapittel 3.3.3. Her inngår imidlertid lasttrykket p_L som drivledd i lign. (7.90), og dermed kommer dynamikken mellom pådraget x_v og lasttrykket i tillegg. Denne dynamikken er gitt av

$$p_L(s) = \frac{1}{K_{ce}(1 + Ts)} (-D_m\omega_m(s) + K_q x_v(s)) \quad (7.91)$$

hvor

$$T = \frac{V_t}{4\beta K_{ce}} \quad (7.92)$$

Uttrykket for p_L settes inn i lign. (7.90):

$$\left(J - \frac{J_L}{J} \frac{\frac{s^2}{\Omega_1^2}}{1 + 2Z\frac{s}{\Omega_1} + \frac{s^2}{\Omega_1^2}} + \frac{D_m^2}{K_{ce}s(1 + Ts)}\right) s^2 \theta_m(s) = \frac{D_m K_q}{K_{ce}(1 + Ts)} x_v \quad (7.93)$$

Etter en del regning finner man at

$$\frac{\theta_m}{x_v}(s) = \frac{\frac{K_q}{D_m} (1 + 2Z\frac{s}{\Omega_1} + \frac{s^2}{\Omega_1^2})}{s(1 + 2\zeta_{he}\frac{s}{\omega_{he}} + \frac{s^2}{\omega_{he}^2})} \quad (7.94)$$

hvor ζ_{he} relativ demping og ω_{he} er udempet resonansfrekvens som skyldes kompressibilitet i oljen i kombinasjon med mekanisk elastisitet i overføringen til lasten.

Her kan man ikke som i kapittel 3.3.3 anta noe om hvilken av frekvensene Ω_1 og ω_{he} som er størst.

7.7.2 Passivitetsbetraktning

For en hydraulisk motor er $q_L \mapsto p_L$ passiv siden effekt inn på motoren er lasttrykk multiplisert med volumstrømmen. Også prosessen med sleideposisjonen x_v som inngang og p_L som utgang, vil kunne betraktes som passiv innenfor det vanlige arbeidsområdet til servoventilen. Videre er $p_L \mapsto \omega_m$ passiv hvilket også sees ved bruk av en effektbetraktning. Dette betyr at transferfunksjonen fra pådraget x_v til motorhastigheten ω_m har fase mindre enn 180° i tallverdi.

For en hydraulisk posisjonservo kan passivitetsbetraktninger benyttes hvis man antar at den hydrauliske resonansfrekvensen er mye større enn kryssfrekvensen. I så fall er modellen for en hydraulisk motor med pådrag x_v og måling θ_m kun en enkel integrator, som er et passivt system. Denne tilnærmelsen er selvsagt bare gyldig så lenge servosystemet ikke eksiteres i frekvensområdet omkring eller over den hydrauliske resonansen.

7.8 Distribuert elastisitet i lasten

Elastiske systemer som består av masser eller tregghetsmomenter som er koblet sammen med fjærer og dempere sies å ha **konsentrert elastisitet**, mens systemer med **distribuert elastisitet** har elastiske deler hvor masse, fjæring og demping er kontinuerlig distribuert. Systemer med konsentrert elastisitet beskrives med ordinære differensialligninger, mens systemer med distribuert elastisitet beskrives med partielle differensialligninger.

Passivitet er meget viktig i utvikling av regulatorer for hastighets- og posisjonsstyring av distribuerte systemer. Her gjelder som for konsentrerte systemer at hvis en kraft er pådrag til systemet, og hastigheten måles i samme punkt, er prosessen passiv og transferfunksjonen har dermed fase større eller lik -90° . Et system som har pådrag virkende i punktet hvor hastighet eller posisjon måles, sies å ha **kollokasjon** av pådrag og måling (*ko-*: sammen, *lokasjon*: plassering). En prosess med kraft i et punkt som pådrag og hastighet i et annet punkt som måling vil i et distribuert system normalt ikke være passiv, og i tillegg kan den være ikke-minimum-fase som følge av nullpunkter i høyre halvplan. Dette er kompliserende i regulatordesign, og begrenser den oppnåelige båndbredden i systemet. Kollokasjon er derfor viktig i distribuerte systemer.

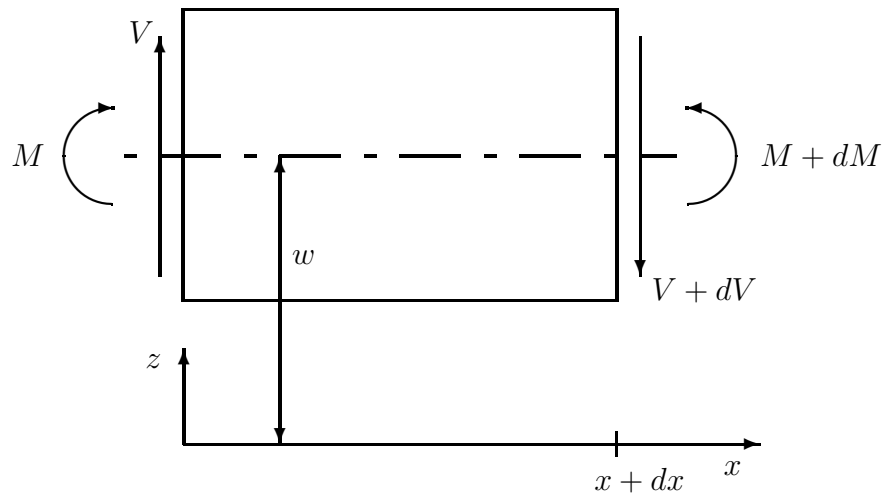
Denne problemstillingen har særlig vært undersøkt i forbindelse med aktiv demping av mekaniske svingninger i store romkonstruksjoner, men den har stor betydning for en rekke servosystemer.

7.8.1 Euler-Bernoulli bjelke*

Viktigheten av kollokasjon skal demonstreres med et enkelt distribuert system. En motor driver en elastisk bjelke. Bjelken er homogen og tynn. Elastisk utbøyning av en tynn bjelke beskrives med Euler-Bernoullis teori, og denne type bjelke betegnes ofte for en **Euler-Bernoulli bjelke** [31].

Først utledes bevegelsesligningen for bjelken uten motor. Bjelken er vist i figur 7.20, og et volumelement av bjelken er vist i figur 7.21.

Elastisk utbøyning av bjelken i z -retning betegnes med $w(x, t)$. $M(x, t)$ er bøyemomentet og $V(x, t)$ er skjærkraft. Bevegelsesligningen for et volumelement i z -retning er

Figur 7.20: *Elastisk bjelke*Figur 7.21: *Volumelement av bjelke med krefter og momenter.*

gitt av Newtons kraftlov:

$$-(V + dV) + V = \rho dx \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(x, t) \quad (7.95)$$

hvor ρ er masse/lengdeenhet av bjelken. Momentbalansen om y -aksen gjennom punktet 0 gir

$$(M + dM) - (V + dV)dx - M = 0 \quad (7.96)$$

Divisjon med dx gir

$$-\frac{\partial V}{\partial x}(x, t) = \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(x, t) \quad (7.97)$$

og

$$\frac{\partial M}{\partial x}(x, t) - V(x, t) = 0 \quad (7.98)$$

Ved å sette inn lign. (7.98) i lign. (7.97) fås

$$-\frac{\partial^2 M}{\partial x^2}(x, t) = \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(x, t) \quad (7.99)$$

I følge Euler-Bernoullis bjelketeori er forholdet mellom bøyemomentet og utbøyningen gitt av

$$M(x, t) = EI(x) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x, t) \quad (7.100)$$

hvor E er elastisitetsmodulen til materialet i bjelken, og $I(x)$ er flatetregghetsmomentet av tverrsnittet av bjelken om y -aksen [18]. Ved å sette inn denne ligningen i lign. (7.99), fås bevegelsesligningen for laterale svingninger i en uniform bjelke:

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4}(x, t) + \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(x, t) = 0 \quad (7.101)$$

Ligningen skrives gjerne

$$c^2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4}(x, t) + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(x, t) = 0 \quad (7.102)$$

hvor

$$c^2 = \frac{EI}{\rho} \quad (7.103)$$

Denne type partiell differensialligning kan løses ved å separere variable [21]:

$$w(x, t) = \phi(x)q(t) \quad (7.104)$$

Bevegelsesligningen kan da skrives

$$\frac{c^2}{\phi(x)} \frac{d^4 \phi(x)}{dx^4} = -\frac{1}{q(t)} \frac{d^2 q(t)}{dt^2} = \omega^2 \quad (7.105)$$

hvor ω^2 er en positiv konstant. Ligningene i rom og tid kan skrives

$$\frac{d^4 \phi(x)}{dx^4} - \beta^4 \phi(x) = 0 \quad (7.106)$$

$$\frac{d^2 q(t)}{dt^2} + \omega^2 q(t) = 0 \quad (7.107)$$

hvor

$$\beta^4 = \frac{\omega^2}{c^2} = \frac{\rho \omega^2}{EI} \quad (7.108)$$

Differensialligningen i tiden t er et enkelt svingesystem med poler i $\pm j\omega$, mens differensialligningen i romkoordinaten x er av fjerde orden. Løsningen av denne ligningen er

$$\phi(x) = B_1 e^{\beta x} + B_2 e^{-\beta x} + B_3 e^{j\beta x} + B_4 e^{-j\beta x} \quad (7.109)$$

som også kan skrives

$$\phi(x) = C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x + C_3 \cosh \beta x + C_4 \sinh \beta x \quad (7.110)$$

hvor B_i og C_i , $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ er konstanter som må finnes fra grensebetingelsene.

Vanlige grensebetingelser er:

1. Innspent ende:

$$\text{Utbøyning} = w = 0 \quad (7.111)$$

$$\text{Stigningstall} = \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad (7.112)$$

2. Fri ende:

$$\text{Bøyemoment} = EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad (7.113)$$

$$\text{Skjærkraft} = EI \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} = 0 \quad (7.114)$$

Grensebetingelsene i dette tilfelle er at bjelken er innspent for $x = 0$ og fri for $x = \ell$. Dette gir konstantene C_i , $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ ut fra ligningene

$$\phi(0) = C_1 \cos 0 + C_3 \cosh 0 = 0 \Rightarrow C_1 + C_3 = 0 \quad (7.115)$$

$$\phi'(0) = \beta(C_2 \cos 0 + C_4 \cosh 0) = 0 \Rightarrow C_2 + C_4 = 0 \quad (7.116)$$

$\phi(x)$ kan dermed skrives

$$\phi(x) = C_1(\cos \beta x - \cosh \beta x) + C_2(\sin \beta x - \sinh \beta x) \quad (7.117)$$

Grensebetingelsene for $x = \ell$ er

$$\phi''(\ell) = -\beta^2[C_1(\cos \beta \ell + \cosh \beta \ell) + C_2(\sin \beta \ell + \sinh \beta \ell)] = 0 \quad (7.118)$$

$$\phi'''(\ell) = \beta^3[C_1(\sin \beta \ell - \sinh \beta \ell) - C_2(\cos \beta \ell + \cosh \beta \ell)] = 0 \quad (7.119)$$

som gir ligningssystemet

$$\begin{pmatrix} \cos \beta \ell + \cosh \beta \ell & \sin \beta \ell + \sinh \beta \ell \\ \sin \beta \ell - \sinh \beta \ell & -\cos \beta \ell - \cosh \beta \ell \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (7.120)$$

En nødvendig betingelse for at dette ligningssystemet skal ha ikke-trivielle løsninger for C_1 og C_2 er at

$$\det \begin{pmatrix} \cos \beta \ell + \cosh \beta \ell & \sin \beta \ell + \sinh \beta \ell \\ \sin \beta \ell - \sinh \beta \ell & -\cos \beta \ell - \cosh \beta \ell \end{pmatrix} = 0 \quad (7.121)$$

↓

$$\cos \beta \ell \cosh \beta \ell = -1 \quad (7.122)$$

Den transcendent lign. (7.122) er oppfylt bare for diskrete verdier av β , og disse verdiene betegnes β_i , $i \in \{1, 2, 3, \dots\}$. Hver av disse diskrete verdiene β_i svarer til en formfunksjon $\phi_i(x)$ med konstanter C_{1i} og C_{2i} , og til en resonansfrekvens ω_i gitt ved

$$\omega_i = \beta_i^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho}} \quad (7.123)$$

Konstanten C_{2i} kan uttrykkes ved C_{1i} ved å bruke lign. (7.118):

$$C_{2i} = -\frac{\cos \beta \ell + \cosh \beta \ell}{\sin \beta \ell + \sinh \beta \ell} C_{1i} \quad (7.124)$$

Løsningen for $\phi_i(x)$ kan dermed skrives

$$\phi_i(x) = C_{1i}[(\cos \beta_i x - \cosh \beta_i x) - \alpha_i(\sin \beta_i x - \sinh \beta_i x)] \quad (7.125)$$

hvor

$$\alpha_i = \frac{\cos \beta_i \ell + \cosh \beta_i \ell}{\sin \beta_i \ell + \sinh \beta_i \ell} \quad (7.126)$$

Konstanten C_{1i} må velges og dette gjøres vanligvis ved normaliseringen

$$\int_0^\ell \rho [\phi_i(x)]^2 dx = 1 \quad (7.127)$$

Løsningen for utbøyningen blir

$$w(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} w_i(x, t) \quad (7.128)$$

med

$$w_i(x, t) = \phi_i(x) q_i(t) \quad (7.129)$$

hvor $q_i(t)$ oppfyller differensialligningen

$$\frac{d^2 q_i(t)}{dt^2} + \omega_i^2 q_i(t) = 0 \quad (7.130)$$

Den enkelte komponenten $w_i(x, t)$ kalles svingemodus i .

Numeriske verdier for de første verdiene av $\beta_i \ell$ og α_i er

$$\begin{aligned} \beta_1 \ell &= 1.875104, & \alpha_1 &= 0.7341 \\ \beta_2 \ell &= 4.694091, & \alpha_2 &= 1.0185 \\ \beta_3 \ell &= 7.854757, & \alpha_3 &= 0.9992 \\ \beta_4 \ell &= 10.99554, & \alpha_4 &= 1.000 \end{aligned}$$

I dette eksemplet er

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{\beta_2^2}{\beta_1^2} = 6.25$$

7.8.2 Aktiv demping

Vi skal nå utvikle en dynamisk modell for en innspent Euler-Bernoulli bjelke med kraftpådrag. Kraften u antas å virke vinkelrett på bjelken i posisjon x_u . Dette kan modelleres med en Dirac deltafunksjon $\delta(x)$ i bølgeligningen:

$$\rho c^2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4}(x, t) + \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(x, t) = \delta(x - x_u) u \quad (7.131)$$

Den partielle differensialligningen inneholder nå et drivledd $\delta(x - x_u)u$ og separasjon av variable kan ikke brukes for å finne en løsning. Vi benytter i stedet at på et endelig intervall $x \in [0, \ell]$ har differensialoperatoren $\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}$ et diskret spektrum med egenverdier β_i og tilhørende egenfunksjoner ϕ_i , $i \in \{1, 2, 3, \dots\}$ [23], hvilket vil si at

$$\frac{\partial^4 \phi_i(x)}{\partial x^4} = \beta_i^4 \phi_i(x), \quad i \in \{1, 2, \dots\} \quad (7.132)$$

Løsninger for β_i og $\phi_i(x)$ avhenger av grensebetingelsene. Egenfunksjonene $\phi_i(x)$ er ortogonale for distinkte egenverdier β_i , mens egenfunksjonene for sammenfallende egenverdier kan velges slik at de er ortogonale. Ortogonalitet av egenfunksjonene $\phi_i(x)$ betyr i denne sammenheng at

$$\int_0^\ell \rho \phi_i(x) \phi_j(x) dx = \delta_{ij} \quad (7.133)$$

hvor

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \quad (7.134)$$

er Kroneckers delta.

Videre spanner $\phi_i(x)$, $i \in \{1, 2, \dots\}$ ut hele løsningsrommet [23]. Vi kan dermed skrive løsningen $w(x, t)$ som en lineær kombinasjon av egenfunksjonene:

$$w(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} q_i(t) \phi_i(x) \quad (7.135)$$

Den partielle differensialligningen blir da

$$\sum_{i=1}^{\infty} [\rho c^2 q_i(t) \frac{\partial^4 \phi_i(x)}{\partial x^4}(x, t) + \rho \frac{\partial^2 q_i(t)}{\partial t^2}(x, t) \phi_i(x)] = \delta(x - x_u) u(t) \quad (7.136)$$

Innsetting av (7.132) og $\omega_i^2 = c^2 \beta_i^4$ gir

$$\sum_{i=1}^{\infty} \rho \phi_i(x) [\omega_i^2 q_i(t) + \ddot{q}_i(t)] = \delta(x - x_u) u(t) \quad (7.137)$$

Vi skal nå utnytte at egenfunksjonene er ortogonale for å komme frem til en hensiktsmessig form på bevegelsesligningene. Dette gjøres ved å multiplisere ligningen med $\phi_j(x)$ og integrere over intervallet $x \in [0, \ell]$. Vi finner

$$\int_0^\ell \phi_j(x) \sum_{i=1}^{\infty} \rho \phi_i(x) dx [\omega_i^2 q_i(t) + \ddot{q}_i(t)] = \int_0^\ell \phi_j(x) \delta(x - x_u) dx u(t) \quad (7.138)$$

hvor ledd som bare er funksjoner av tiden t er satt utenfor integrasjonen. For en vilkårlig funksjon $f(x)$ så gjelder $\int_0^\ell f(x) \delta(x - x_u) dx = f(x_u)$. Dette resultatet sammen med innsetting av (7.133) gir

$$\omega_i^2 q_i(t) + \ddot{q}_i(t) = \phi_i(x_u) u(t) \quad (7.139)$$

som på Laplacetransformert form kan skrives

$$q_i(s) = \frac{\phi_i(x_u)}{\omega_i^2 + s^2} u(s) \quad (7.140)$$

For å oppnå aktiv vibrasjonsdemping benyttes en måling

$$y(t) = \dot{w}(x_y, t) \quad (7.141)$$

som er hastigheten til den elastiske utbøyningen i posisjon x_y . Da er

$$y(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \dot{q}_i(t) \phi_i(x_y) \quad (7.142)$$

Transferfunksjonen fra u til y blir

$$\frac{y}{u}(s) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{s\phi_i(x_y)\phi_i(x_u)}{\omega_i^2 + s^2} \quad (7.143)$$

Vi kan gjøre følgende observasjoner ut fra denne transferfunksjonen:

1. Hvis måling og pådrag er kollokert hvilket vil si at $x_u = x_y = x_0$, så er transferfunksjonen fra u til y passiv siden

$$\frac{y}{u}(s) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{s\phi_i^2(x_0)}{\omega_i^2 + s^2} \quad (7.144)$$

som er en sum av passive transferfunksjoner. Passivitet kan også påvises ved energibetraktning. La V være summen av potensiell og kinetisk energi. Da er

$$\dot{V}(t) = y(t)u(t) - g(t) \quad (7.145)$$

hvor $\int_0^T g(t)dt \geq 0$ er energitap i systemet. Det følger at systemet er passivt.

2. Hvis måling og pådrag ikke er kollokert hvilket vil si at $x_u \neq x_y$, kan det forekomme at $\phi_i(x_y)$ og $\phi_i(x_u)$ har motsatt fortegn for visse i . I så fall er ikke transferfunksjonen fra u til y passiv. I dette tilfelle kan det være meget vanskelig å oppnå god ytelse ved aktiv vibrasjonsdemping.
3. Hvis $\phi_i(x_u) = 0$, så vil ikke pådraget u ha noen innvirkning på svingemodus i , og aktiv demping av denne svingemodus i er ikke mulig ved bruk av pådraget u . I tilstandsrom-terminologi sier man at modus i ikke er styrbar.
4. Hvis $\phi_i(x_y) = 0$, så vil svingemodus i ikke gi noe bidrag til målingen y , og aktiv demping av denne svingemodus i er ikke mulig ved bruk av målingen y . I tilstandsrom-terminologi sier man at modus i ikke er observerbar.

Eksempel 7.3 Vi betrakter en homogen kragbjelke av aluminium med rektangulært tverrsnitt, lengde $\ell = 2$ m, bredde $b = 0.05$ m, høyde $h = 0.01$ m, tetthet pr. lengdeenhet $\rho = b \cdot h \cdot 2700 \text{ kg/m}^3 = 1.35 \text{ kg/m}$, elastisitetsmodul $E = 70 \cdot 10^9 \text{ N/m}^2$ og flatetreghetsmoment $I = bh^3/12 = 4.167 \cdot 10^{-9} \text{ m}^4$.

Da er

$$\beta_1 = 0.937552 \text{ m}^{-1}, \quad \beta_2 = 2.3470455 \text{ m}^{-1}$$

$$\alpha_1 = 0.734, \quad \alpha_2 = 1.018$$

Resonansfrekvensene finnes av $\omega_i = \beta_i^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho}}$ som gir

$$\omega_1 = 12.8 \text{ rad/s}, \quad \omega_2 = 80.1 \text{ rad/s}$$

Normalisering av formfunksjonene gir

$$C_{11} = 0.6086 \text{ m}, \quad C_{12} = 0.6086 \text{ m}$$

hvor konstantene C_{11} og C_{12} finnes ved numerisk integrasjon av (7.127). Formfunksjonene for svingemodus 1 og 2 blir

$$\phi_1(x) = -0.6086 \cdot \{\cos(\beta_1 x) - \cosh(\beta_1 x) - 0.7341 \cdot [\sin(\beta_1 x) - \sinh(\beta_1 x)]\} \quad (7.146)$$

og

$$\phi_2(x) = -0.6086 \cdot \{\cos(\beta_2 x) - \cosh(\beta_2 x) - 1.0185 \cdot [\sin(\beta_2 x) - \sinh(\beta_2 x)]\} \quad (7.147)$$

Anta at $x_u = x_y = 2$ m. Da er

$$\phi_1(x_u) = \phi_1(x_y) = 1.22, \quad \phi_2(x_u) = \phi_2(x_y) = -1.22$$

Transferfunksjonen fra u til y blir da

$$\frac{y}{u}(s) = \frac{1.5s}{12.8^2 + s^2} + \frac{1.5s}{80.1^2 + s^2} = 3.0 \frac{s(57.4^2 + s^2)}{(12.8^2 + s^2)(80.1^2 + s^2)} \quad (7.148)$$

som er passiv. Legg merke til at de komplekskonjugerte nullpunktene i $s = \pm j57.4$ ligger mellom polene i $s = \pm j12.8$ og $s = \pm j80.1$ i absoluttverdi. En enkel P-regulator

$$u = -K_p y \quad (7.149)$$

vil gi stabilitet og aktiv demping. Denne regulatoren vil forøvrig gi en effektdissipasjon i systemet på $u(t)y(t) = -K_p y(t)^2$. Forsterkningen K_p er her bare begrenset av støy og digitaliseringseffekter.

Anta at pådraget virker en fjerdedel ut på bjelken, mens målingen tas på enden slik at $x_u = 0.5$ m og $x_y = 2$ m. Da er

$$\phi_1(x_u) = 0.12 \quad \phi_1(x_y) = 1.22$$

$$\phi_2(x_u) = 0.51 \quad \phi_2(x_y) = -1.22$$

Transferfunksjonen fra u til y blir da

$$\frac{y}{u}(s) = \frac{0.15s}{12.8^2 + s^2} - \frac{0.62s}{80.1^2 + s^2} = -0.47 \frac{s(47.6^2 - s^2)}{(12.8^2 + s^2)(80.1^2 + s^2)} \quad (7.150)$$

Transferfunksjonen har et nullpunkt i høyre halvplan for $s = 47.6$ som begrenser båndbredden til systemet. Videre ser man at transferfunksjonen er summen av to relativt like transferfunksjoner som har motsatt fortegn. Dette betyr at hvis man benytter en P-regulator med negativ tilbakekobling, så vil dette gi stabilisering gjennom effektdissipering for modus 1. Imidlertid vil dette gi positiv tilbakekobling og destabiliserende tilføring av effekt for modus 2, og det er dermed ikke mulig å dempe både modus 1 og 2 samtidig med en P-regulator. Det viser seg at denne type prosess er meget vanskelig å regulere også med avanserte regulatorer. Konklusjonen er at man bør ha kollokasjon mellom sensor og aktuator. ■

7.8.3 Motor og Euler-Bernoulli bjelke*

En motor med treghetsmoment J_m og vinkel θ_m driver en Euler-Bernoulli bjelke med lengde ℓ som vist i fig. 7.22.

Pådraget i systemet er motormomentet T_m . Kun første svingemodus tas med for bjelken.

Posisjonen av et punkt på bjelken er gitt av

$$b(x, t) = x\theta_m(t) + w(x, t) \quad (7.151)$$

Figur 7.22: Motor som driver elastisk bjelke

hvor $b(x, t)$ er buelengden fra nullposisjonen langs en sirkel med radius x . Den elastiske bevegelsen tangentielt til bevegelsen bjelken ville hatt hvis den var et stivt legeme, skrives

$$w(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \phi_i(x) q_i(t) \quad (7.152)$$

Her skal vi bruke egenfunksjonene ϕ_i for en innspent Euler-Bernoulli bjelke. Dette er en relativt vanlig tilnærming å gjøre for denne type problemer. Hvis tregheten til motoren er stor i forhold til tregheten av bjelken er dette en god tilnærming. Det antas at w er så liten at tillegget til buelengden kan tilnærmes med den tangentielle bevegelsen.

Bevegelsesligningen for motor og bjelke er gitt av spinnsatsen

$$\dot{h}(t) = T_m(t) \quad (7.153)$$

hvor spinnet for det distribuerte systemet er

$$h(t) = J_m \dot{\theta}_m + \int_0^{\ell} [x \dot{\theta}_m + \sum_{i=1}^{\infty} \phi_i(x) \dot{q}_i(t)] \rho x dx \quad (7.154)$$

Bevegelsesligningen blir:

$$\dot{h}(t) = J_i \ddot{\theta}_m(t) + \sum_{i=1}^{\infty} h_i \ddot{q}_i(t) = T_m(t) \quad (7.155)$$

hvor

$$J_t = J_m + \int_0^\ell \rho x^2 dx \quad (7.156)$$

og

$$h_i = \int_0^\ell \rho \phi_i(x) x dx \quad (7.157)$$

er spinnkoeffisient for svingemodus i .

Ligningen for den elastiske bevegelsen er som lign. (7.102) bortsett fra at akselerasjonen i dette tilfelle er $\partial^2 b / \partial t^2$ og ikke $\partial^2 w / \partial t^2$:

$$c^2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4}(x, t) + \frac{\partial^2 b}{\partial t^2}(x, t) = 0 \quad (7.158)$$

Ved å sette inn

$$w(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \phi_i(x) q_i(t) \quad (7.159)$$

og

$$b(x, t) = x \theta_m(t) + \sum_{i=1}^{\infty} \phi_i(x) q_i(t) \quad (7.160)$$

fås

$$\sum_{i=1}^{\infty} [c^2 \phi_i''''(x) q_i(t) + \phi_i(x) \ddot{q}_i(t)] + x \ddot{\theta}_m(t) = 0 \quad (7.161)$$

Egenfunksjonen ϕ_i oppfyller lign. (7.132), og dermed fremkommer

$$\sum_{i=1}^{\infty} \phi_i(x) [\omega_i^2 q_i(t) + \ddot{q}_i(t)] + x \ddot{\theta}_m(t) = 0 \quad (7.162)$$

hvor $\omega_i^2 = c^2 \beta_i^4$. Vi eliminerer $\phi_i(x)$ ved å multiplisere med $\phi_j(x)$ og integrere over $x \in [0, \ell]$:

$$\int_0^\ell \rho \phi_j(x) \{ \phi_i(x) [\omega_i^2 q_i(t) + \ddot{q}_i(t)] + x \ddot{\theta}_m(t) \} dx = 0 \quad (7.163)$$

Ved å utnytte ortogonaliteten som gitt av (7.133) fås bevegelsesligningen

$$\omega_i^2 q_i(t) + \ddot{q}_i(t) + h_i \ddot{\theta}_m(t) = 0 \quad (7.164)$$

hvor h_i er spinnkoeffisient for modus i definert ved

$$h_i = \int_0^\ell \rho \phi_i(x) x dx \quad (7.165)$$

Laplacetransformasjon av bevegelsesligningene gir

$$q_i(s) = -h_i \frac{s^2}{\omega_i^2 + s^2} \theta_m(s) \quad (7.166)$$

og

$$J_t s^2 \theta_m(s) + \sum_{i=1}^{\infty} h_i s^2 q_i = T_m(s) \quad (7.167)$$

som ved innsetting av $q_i(s)$ gir

$$J_t s^2 \theta_m(s) = T_m(s) + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{h_i^2 s^2}{\omega_i^2 + s^2} s^2 \theta_m(s) \quad (7.168)$$

Dermed kan den søkte transferfunksjonen fra motormoment til motorposisjon finnes:

$$\frac{\theta_m}{T_m}(s) = \frac{1}{J_t s^2} \frac{(1 + \frac{s^2}{\omega_1^2})(1 + \frac{s^2}{\omega_2^2})(1 + \frac{s^2}{\omega_3^2}) \dots}{(1 + \frac{s^2}{\omega_{n1}^2})(1 + \frac{s^2}{\omega_{n2}^2})(1 + \frac{s^2}{\omega_{n3}^2}) \dots} \quad (7.169)$$

Denne transferfunksjonen har fase større eller lik -180° siden transferfunksjonen fra motormomentet $T_m(s)$ til motorhastigheten $\dot{\theta}(s) = s\theta_m(s)$ er passiv. Det finnes imidlertid ikke en enkel sammenheng mellom ω_{ni} og ω_i slik som tilfellet er med kun en svingemodus som i lign. (7.15). Passivitetsegenskapene tilsier imidlertid at $\omega_1 < \omega_{ni}$ for alle i .

Til sist skal transferfunksjonen fra motormomentet til endeposisjonen $b_\ell(t) = b(\ell, t)$ finnes. Fra definisjonen av $b(x, t)$ er

$$b_\ell(s) = \ell\theta_m(s) + \sum_{i=1}^{\infty} \phi_i(\ell)q_i(s) \quad (7.170)$$

Ved å sette inn for $q_i(s)$ fås

$$b_\ell(s) = (\ell - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\phi_i(\ell)h_i s^2}{\omega_i^2 + s^2})\theta_m(s) \quad (7.171)$$

For å komme videre betraktes kun den første svingemodus ($i = 1$). Uttrykket forenkles da til

$$b_\ell(s) = \frac{\ell[1 - (\frac{\phi_1(\ell)h_1}{\ell} - 1)\frac{s^2}{\omega_1^2}]}{1 + \frac{s^2}{\omega_1^2}}\theta_m(s) \quad (7.172)$$

Innsetting av $\theta_m(s)$ gir

$$b_\ell(s) = \frac{\ell[1 - (\frac{\phi_1(\ell)h_1}{\ell} - 1)\frac{s^2}{\omega_1^2}]}{J_m s^2(1 + \frac{s^2}{\omega_{n1}^2})}T_m(s) \quad (7.173)$$

Leddene $(\frac{\phi_1(\ell)h_1}{\ell} - 1)$ må undersøkes nærmere:

$$\frac{\phi_1(\ell)h_1}{\ell} = \int_0^\ell \frac{\phi_1(\ell)}{\ell} \phi_1(x) \rho x dx \quad (7.174)$$

For den første egenfunksjonen til en innspent Euler-Bernoulli bjelke gjelder

$$\frac{x}{\ell} \phi_1(\ell) > \phi_1(x), \quad x \in (0, \ell)$$

og følgelig er

$$\frac{\phi_1(\ell)h_1}{\ell} \geq \int_0^\ell \rho[\phi_1(x)]^2 dx = 1 \quad (7.175)$$

og dette betyr at

$$\gamma^2 = \frac{\phi_1(\ell)h_1}{\ell} - 1 > 0 \quad (7.176)$$

Transferfunksjonen fra motormoment T_m til endeposisjon b_ℓ kan derfor skrives

$$\frac{b_\ell}{T_m}(s) = \frac{\ell[1 - \gamma^2 \frac{s^2}{\omega_1^2}]}{J_m s^2(1 + \frac{s^2}{\omega_{n1}^2})} \quad (7.177)$$

Dette viser at systemet er ikke-minimum fase med nullpunkt i $s = \pm\omega_1/\gamma$ hvor γ antas å være positiv.

Ved tilbakekobling fra b_ℓ er den praktisk oppnåelige båndbredden dermed begrenset av $\omega = \omega_1/\gamma$ på grunn av nullpunktet i høyre halvplan.

7.9 MATLAB-eksempler

Bodediagrammet for motor med last (figur 7.2 og 7.3) ble generert av:

```

K=0.5; JM=1; JL=1; D=0.05;
A = [ 0      1      0      0
      -K/JM -D/JM  K/JM  D/JM
        0      0      0      1
        K/JL   D/JL -K/JL -D/JL ];
B = [ 0 1/JM 0 0 ]';
C = [ 0 0 1 0 ];
D = 0;
w = logspace(-1,1,500);

[mag,phase]=bode(A,B,C,D,1,w);
clg, subplot(211)
axis([-1 1 -40 40]);
semilogx(w,20*log10(mag))
grid,xlabel('w'),ylabel('amplitude (dB)')
axis;
if phase(1) > 0, phase = phase-360;end
semilogx(w,phase,[0.1 10],[-180 -180])
grid,xlabel('w'),ylabel('fase')

subplot(111)

```

Bodediagram for fire koblede masse (fig. 7.12–7.14) fås med følgende kommandoer. De forskjellige transferfunksjonene kommer frem ved å endre på C -matrisen:

```

d12=0.1; d23=0.1; d34=0.1;
k12=1; k23=1; k34=1;
A = [ 0      1      0      0      0      0      0      0
      -k12 -d12  k12    d12    0      0      0      0
        0      0      0      1      0      0      0      0
        k12   d12 -k12-k23 -d12-d23 k23    d23    0      0
        0      0      0      0      0      1      0      0
        0      0      k23    d23   -k23-k34 -d23-d34 k34    d34
        0      0      0      0      0      0      0      1
        0      0      0      0      k34    d34   -k34  -d34 ];
B = [0 0 0 1 0 0 0 0]';
C = [0 0 0 0 0 0 0 1];
D = 0;

```

```

w = logspace(-1,1,500);

[mag,phase]=bode(A,B,C,D,1,w);

clg, subplot(211)
axis([-1 1 -40 40]);
semilogx(w,20*log10(mag))
grid,xlabel('w'),ylabel('amplitude(dB)')
axis;
if phase(1) > 0, phase = phase-360;end
semilogx(w,phase),grid,xlabel('w'),ylabel('fase')
print

```

Beregning av C_{11} og C_{12} i eksempel 7.3 er gjort med

```

global beta alpha

L = 2;

beta_1 = 1.875104/L; alpha_1 = 0.7341;
beta_2 = 4.694091/L; alpha_2 = 1.0185;

rho = 1.35;

beta = beta_1; alpha = alpha_1;
int1 = quad('phi_i_sqr',0,L)

beta = beta_2; alpha = alpha_2;
int2 = quad('phi_i_sqr',0,L)

C11 = sqrt(1/(int1*rho))
C12 = sqrt(1/(int2*rho))

```

med funksjonen

```

function y = phi_i_sqr(x)
global beta alpha
z = beta*x;
phi = cos(z) - cosh(z) - alpha*(sin(z) - sinh(z));
y = phi.*phi;

```

Kapittel 8

Poler og nullpunkter i høyre halvplan

8.1 Innledning

Det forekommer at servosystemer er ustabile i åpen sløyfe. For lineære systemer skjer dette når prosessen har poler i høyre halvplan eller multiple poler på den imaginære akse. Denne type prosesser må styres med tilbakekobling for at de skal være stabile.

Bruk av tilbakekobling kan i enkelte tilfeller gi en større frihet i design av systemer for høy ytelse. Et eksempel på dette er den nye generasjon av hurtigbåter med helt ned-senkede foiler som er ustabile uten tilbakekobling fra høydemåler og måling av krengeing. Et annet eksempel er en ny type jagerfly med vingene pekende forover. Denne typen fly kan ikke styres av en pilot med styrestikke uten elektronisk stabilisering ved tilbakekobling fra måling av flyets vinkelhastighet og orientering som måles med gyroskopbaserte instrumenter.

8.2 Regulatordesign i Bodediagram

Ved bruk av Bodediagram eller Nyquistdiagram må transferfunksjonen settes opp på standardform. For systemer med alle polene i venstre halvplan er standardformen

$$h(s) = K \frac{s^q(1 + T_a s)(1 + T_b s) \dots}{s^r(1 + T_1 s)(1 + T_2 s) \dots} \quad (8.1)$$

hvor $q \in \{0, 1, 2, \dots\}$, $r \in \{0, 1, 2, \dots\}$ og $K, T_1, T_2 \dots$ er positive konstanter, mens $T_a, T_b \dots$ er konstanter som kan være positive eller negative. Hvis prosessen har poler $1/T_1^{hhp}, 1/T_2^{hhp} \dots$ i høyre halvplan skal transferfunksjonen ha formen

$$h(s) = K \frac{s^q(1 + T_a s)(1 + T_b s) \dots}{s^r(1 + T_1 s)(1 + T_2 s) \dots (T_1^{hhp} s - 1)(T_2^{hhp} s - 1) \dots} \quad (8.2)$$

hvor $q \in \{0, 1, 2, \dots\}$, $r \in \{0, 1, 2, \dots\}$ og $K, T_1, T_2 \dots, T_1^{hhp}, T_2^{hhp} \dots$ er positive konstanter, mens $T_a, T_b \dots$ kan være positive eller negative konstanter.

I det generelle tilfelle er det komplisert å bruke Bodediagrammet for systemer med poler i høyre halvplan. Det er viktig å være klar over at det vanlige stabilitetskriteriet i Bode- eller Nicholsdiagram er formulert for systemer som ikke har poler i høyre

halvplan. For å finne stabilitetskriterier for systemer med poler i høyre halvplan må Nyquistkriteriet (teorem 8.1) brukes. Alternativt kan man bruke algebraiske kriterier som Rouths kriterium eller kriterier basert på plasseringen til det lukkede systems poler.

8.2.1 Systemer med en pol i høyre halvplan

Systemer uten åpne integrasjoner

Gitt systemet

$$h_0(s) = K \frac{(1 + T_a s)(1 + T_b s) \dots}{(T_h s - 1)(1 + T_1 s)(1 + T_2 s) \dots} \quad (8.3)$$

som har en og bare en pol i høyre halvplan. I Nyquistdiagrammet starter stedkurven til $h_0(j\omega)$ i $-K$ med en fase på -180° for $\omega = 0$. Stedkurven ender i origo for $\omega \rightarrow \infty$. Stedkurven til $h_0(j\omega)$ skal omslutte det kritiske punkt.

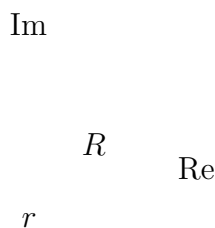
For dette systemet kan regulatorutvikling foregå i Bodediagrammet som for en betinget stabil prosess.

Systemer med en åpen integrasjon

Gitt systemet

$$h_0(s) = K \frac{(1 + T_a s)(1 + T_b s) \dots}{s(T_h s - 1)(1 + T_1 s)(1 + T_2 s) \dots} \quad (8.4)$$

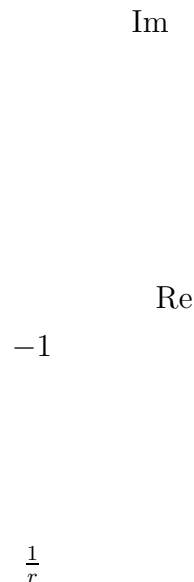
som har en og bare en pol i høyre halvplan og en åpen integrasjon. I Nyquistdiagrammet starter stedkurven til $h_0(j\omega)$ i $s = +j\infty$ for små og positive ω . Kurven starter med fase -270° og når $\omega \rightarrow \infty$ øker fasen til $-90^\circ \cdot (1 + n_p - n_z + n_{zh})$ hvor n_p er antall poler i venstre halvplan, n_z er antall nullpunkt i venstre halvplan og n_{zh} er antall nullpunkt i høyre halvplan, mens absoluttverdien går til null. For negative ω er kurven symmetrisk om den reelle akse med kurven for positive ω .



Figur 8.1: Nyquistkontur

I Nyquistkriteriet skal s gjennomløpe en kontur omkring høyre halvplan som består av den imaginære akse $s = j\omega$ for $\omega \in (-\infty, +\infty)$ og en sirkel med uendelig radius om høyre halvplan. $h_0(s)$ har en pol i origo, og konturen må unngå denne polen for å kunne gi noe resultat. På vanlig måte modifiseres konturen i s -planet med en liten halvsirkel

$$s = r e^{j\phi} \quad (8.5)$$



Figur 8.2: Nyquistdiagram for system med en åpen integrasjon og en pol i høyre halvplan

hvor r er en liten positiv konstant og ϕ starter i -90° og øker til 90° . I Nyquistdiagrammet svarer dette til en sirkel

$$h_0(s) = -(K/r)e^{-j\phi} = Re^{j\theta} \quad (8.6)$$

hvor $\theta = -180^\circ - \phi$ starter i -90° og avtar til -270° . Denne sirkelbuen omslutter hele venstre halvplan og følgelig omslutes det kritiske punkt $-1 + j0$.

Begrepet forsterkningsmargin må presiseres for denne type system. Forsterkningsmarginen er $\Delta K = -|h_0(j\omega_{180})|$ (dB) hvor ω_{180} defineres som frekvensen $\omega > \omega_c$ som er slik at $\angle h_0(j\omega) = -180^\circ$.

På bakgrunn av dette kan vi slå fast:

- Gitt et system med sløyfetransferfunksjon $h_0(s)$. Anta at $h_0(s)$ har en og bare en pol i høyre halvplan og en enkel pol i origo. Hvis h_0 har positiv fasemargin og forsterkningsmargin i Bodediagrammet, så er systemet stabilt.

Stedkurven til systemet omslutter venstre halvplan og dermed det kritiske punkt for $s = re^{j\phi}$ når ϕ starter i -90° og øker til 90° . h_0 skal omslutte det kritiske punkt og gi $1 + h_0(s)$ et positivt vinkelbidrag på 360° siden systemet har en pol i høyre halvplan. Stedkurven må derfor omslutte det kritiske punkt for $\omega > r$. Hvis fasemarginen og forsterkningsmargin er positiv, så er dette oppfylt, og systemet er stabilt. ■

Stedkurven til $h_0(j\omega)$ har i dette tilfelle mye til felles med stedkurven til et betinget stabilt system. Spesielt gjelder dette at fasen er mindre enn eller lik -180° for $\omega < \omega_c$.

Generalisering

Systemer med flere poler i høyre halvplan og flere åpne integratorer må analyseres i Nyquistdiagrammet før stabilitetskriterier i Bodediagrammet kan utledes.

8.2.2 Følge- og avviksforhold

Hvis et system er stabilisert ved bruk av en eller annen teknikk for regulatordesign, så kan frekvensresponsen tegnes i et Bodediagram. Det tilhørende Nicholsdiagrammet kan da brukes til å finne følge- og avviksforhold uavhengig av om det åpne systemet har poler i høyre halvplan.

8.3 Autopilot for skip uten retningsstabilitet

Større tankere mangler ofte retningsstabilitet, og ved utvikling av autopiloter for denne type skip må man designe en regulator for den ustabile prosessen fra rorvinkel δ til kursvinkel ψ . En typisk modell for denne type skip er

$$h(s) = \frac{\psi}{\delta}(s) = K \frac{1 + T_1 s}{s(1 + T_2 s)(T_3 s - 1)} \quad (8.7)$$

Den åpne integrasjonen skyldes integrasjonen fra skipets kursvinkelhastighet til kursvinkelen. Følgende tallverdier, som beskriver en full-lastet tanker, er hentet fra [5]

$$\begin{aligned} K &= 0.022 \\ T_1 &= 38 \text{ s} \\ T_2 &= 16 \text{ s} \\ T_3 &= 192 \text{ s} \end{aligned}$$

Bodediagrammet er vist i figur 8.3 med en proporsjonalregulator med forsterkning $K_p = 14$. For lave frekvenser er asymptotisk helning på amplitudekurven -1 pga. den åpne integratoren. Fasen starter imidlertid på -270° pga. integratoren og polen i høyre halvplan. For høye frekvenser er fasen -180° . Kryssfrekvensen må velges slik at fasen er større enn -180° som er nødvendig for å oppnå positiv forsterkningsmargin. Systemet kan stabiliseres med P-regulatoren

$$\delta = K_p(\psi_0 - \psi) \quad (8.8)$$

hvor ψ_0 er referansen. Nedre begrensning på K_p er $K_p^{min} = 2.2$ for å oppnå positiv fasemargin.

En forsterkning $K_p = 14$ gir en fasemargin på omkring 35° , som er for lite for å oppnå en akseptabel ytelse.

Den karakteristiske ligningen er

$$s(1 + T_2 s)(T_3 s - 1) + K K_p(1 + T_1 s) = 0 \quad (8.9)$$

og forsterkningen på 14 gir poler i $s = -0.0367$ og $s = -0.0103 \pm j0.0512$ som kan finnes i MATLAB med

$$\text{roots}(\text{conv}([16 \ 1 \ 0], [192 \ -1]) + 14*0.022*[0 \ 0 \ 38 \ 1])$$

De to komplekskonjugerte polene har relativ demping på omkring 0.2.

Bedre ytelse er mulig med en PD-regulator

$$\delta(s) = K_p \frac{1 + T_d s}{1 + T_f s} (\psi_0 - \psi) \quad (8.10)$$

Figur 8.3: Bodediagram for autopilot for ustabil tanker. Proporsjonalregulator med $K_p = 14$ er brukt.

Båndbredden som kan oppnås er avhengig av rorservoens båndbredde og støyens karakteristikk. Her velges $T_d = T_2$ og $T_f = 0.1T_2$ og $K_p = 20$. Høyere båndbredde er mulig med mindre derivattid.

Den karakteristiske ligningen er

$$s(1 + 0.1T_2s)(T_3s - 1) + KK_p(1 + T_1s) = 0 \quad (8.11)$$

som har poler i $s = -0.5609$ og $s = -0.0295 \pm j0.0303$ som finnes i MATLAB med

```
roots(conv([1.6 1 0],[192 -1]) + 20*0.022*[0 0 38 1])
```

De to komplekskonjugerte polene har relativ demping $\zeta = 0.7$, som er en gunstig verdi. Bodediagrammet er vist i figur 8.4.

Nyquistdiagram for autopilot med henholdsvis P- og PD-regulator er vist i figur 8.5.

Følgforhold og avvikforhold er definert på samme måte som for systemer som er stabile i åpen sløyfe, og kan finnes i Nicholsdiagrammet.

Figur 8.4: *Autopilot med PD-regulator. Systemet har akseptable stabilitetsmarginer.*

8.4 Pol/nullpunkt-forkorting

8.4.1 Reelle poler i venstre halvplan

Pol/nullpunkt-forkorting eller kansellering er ofte brukt i servoteknikken ved regulatordesign. Spesielt ved bruk av begrenset derivatvirkning er det vanlig å forkorte en av prosessens poler med nullpunktet i regulatoren.

En spenningstyrt likestrømsmotor har transferfunksjon

$$h(s) = \frac{1}{s(1 + \frac{s}{10})(1 + \frac{s}{1000})} \quad (8.12)$$

Systemet skal ha en hastighetskonstant $K_v = 100$.

En P-regulator

$$h_1(s) = K_v \quad (8.13)$$

kan gi en kryssfrekvens $\omega_c = 10$ rad/s med 45° fasemargin. Dette gir en hastighetskonstant

$$K_v \approx \omega_c = 10 \quad (8.14)$$

som er under spesifisert verdi.

Båndbredden kan økes ved å bruke en PD-regulator:

$$h_2(s) = K_v \frac{1 + \frac{s}{10}}{1 + \frac{s}{100}} \quad (8.15)$$

Figur 8.5: Nyquistdiagram for autopilot med P -regulator (merket P) og PD -regulator (merket PD). Det er tydelig at begge regulatorne gir et stabilt system siden stedkurven omslutter det kritiske punkt en omdreining med urviseren. Videre er det klart at PD -regulatoren gir større fasemargin enn P -regulatoren.

Dette gir sløyfetransferfunksjonen

$$h_0(s) = K_v \frac{1}{s(1 + \frac{s}{100})(1 + \frac{s}{1000})} \quad (8.16)$$

Kryssfrekvensen kan nå legges på $\omega_c = 100$ rad/s, og hastighetskonstanten blir

$$K_v \approx \omega_c = 100 \quad (8.17)$$

som spesifisert.

Legg merke til at polen i $s = -10$ ble forkortet med nullpunktet i regulatoren.

8.4.2 Komplekskonjugerte poler i venstre halvplan

Forkorting av én eller to reelle poler i venstre halvplan er vanligvis uproblematisk. Pol/nullpunkt-forkorting har imidlertid også vært brukt for komplekskonjugerte poler med liten relativ demping. Her må man være forsiktig. En slik løsning kan være meget følsom for parametervariasjoner når dempingen er liten.

Anta at en prosess har transferfunksjonen

$$h(s) = \frac{1}{s(1 + 2\zeta_0 \frac{s}{\omega_0} + \frac{s^2}{\omega_0^2})} \quad (8.18)$$

hvor $\omega_0 = 4$ rad/s og $\zeta_0 = 0.1$.

Med en P-regulator

$$h_1(s) = K_v \quad (8.19)$$

er $\omega_{180} = \omega_0 = 4$ rad/s, og systemet har en forsterkningsmargin på 6 dB (=2) hvis hastighetskonstanten er

$$K_v = \zeta_0 \omega_0 = 0.4 \text{ rad/s} \quad (8.20)$$

siden stabilitetsgrensen er

$$K_{v,krit} = 2\zeta_0 \omega_0 = 0.8 \text{ rad/s} \quad (8.21)$$

i følge Rouths kriterium.

Kryssfrekvensen er her

$$\omega_c \approx K_v \quad (8.22)$$

For å oppnå en kryssfrekvens som er høyere enn den udempede resonansfrekvensen ω_0 , er det mulig å forkorte de komplekskonjugerte polene med nullpunktene i regulatoren

$$h_2(s) = K_v \frac{1 + 2\zeta_0 \frac{s}{\omega_0} + \frac{s^2}{\omega_0^2}}{1 + 2\zeta_r \frac{s}{\omega_r} + \frac{s^2}{\omega_r^2}} \quad (8.23)$$

hvor ω_r og ζ_r velges slik at spesifikasjonene til systemet oppfylles. Sløyfetransferfunksjonen blir

$$h_0(s) = K_v \frac{1}{s(1 + 2\zeta_r \frac{s}{\omega_r} + \frac{s^2}{\omega_r^2})} \quad (8.24)$$

Ved å benytte tilstrekkelig stor ω_r kan ideelt sett en vilkårlig høy båndbredde oppnås. I praksis er dette selvsagt ikke tilfelle på grunn av umodellert dynamikk ved høye frekvenser.

Denne metoden har imidlertid visse ulemper:

1. Hvis forkortingen ikke er nøyaktig nok pga. at den korrekte verdien av ω_0 ikke er kjent eller varierer langsomt, kan kraftige resonanser opptre og den resulterende ytelsen blir uakseptabel.
2. Det vil ofte kreve svært mye effekt å dempe ut svingningene forårsaket av de komplekskonjugerte polene i prosessen slik at systemet kan gå i metning og forkortingen ikke blir korrekt.

8.4.3 Poler på den imaginære akse

Gitt prosessen

$$h(s) = \frac{1}{s(s^2 + \omega_0^2)} \quad (8.25)$$

som har poler i $s = 0$ og $s = \pm j\omega_0$. I dette tilfelle er det ikke hensiktsmessig å prøve å forkorte polene med nullpunkter i regulatoren siden det resulterende system er meget følsomt for parametervariasjoner.

Anta at regulatoren

$$h_r(s) = K_v \frac{s^2 + \hat{\omega}_0^2}{1 + 2\zeta_r \frac{s}{\omega_r} + \frac{s^2}{\omega_r^2}} \quad (8.26)$$

benyttes hvor $\omega_r \gg \omega_0$ og $\hat{\omega}_0$ er den beregnede verdien for ω_0 . Sløyfetransferfunksjonen kan tilnærmes med

$$h_0(s) = K_v \frac{s^2 + \hat{\omega}_0^2}{s(s^2 + \omega_0^2)} \quad (8.27)$$

hvis det antas at $\omega_r \gg \omega_c$ som er kryssfrekvensen.

Stabilitet når $\hat{\omega}_0 \neq \omega_0$ kan studeres med Rouths kriterium. Det karakteristiske polynom som er telleren i $1 + h_0(s)$ er

$$s^3 + K_v s^2 + \omega_0^2 s + K_v \hat{\omega}_0^2 \quad (8.28)$$

Stabilitet oppnås hvis

$$K_v(\omega_0^2 - \hat{\omega}_0^2) > 0 \quad (8.29)$$

som bare er tilfredstilt hvis

$$\hat{\omega}_0 < \omega_0 \quad (8.30)$$

hvilket betyr at stabilitetsmarginen til systemet med hensyn på variasjoner i ω_0 er lik null.

Denne metoden må ikke benyttes for denne type system.

8.4.4 Poler i høyre halvplan

Det er ikke mulig å forkorte en pol i høyre halvplan med et nullpunkt. I s -planet går det tilsynelatende an å oppnå forkorting, men det er klart fra Nyquists teorem at dette ikke er tilfelle.

Anta at et system har sløyfetransferfunksjonen $h_0(s)$ med N_p poler i høyre halvplan. Nyquists stabilitetsteorem [3] er da som følger:

Teorem 8.1 (Nyquists stabilitetsteorem) For at et lukket system skal være stabilt må vektoren $1 + h_0(s)$ få en vinkelendring lik $2\pi N_p$ når s gjennomløper en kontur rundt hele høyre halvplan med urviseren.

Legg merke til at det ikke influerer på kriteriet om $h_0(s)$ har nullpunkter som sammenfaller med polene i høyre halvplan. Dette betyr at hvis man prøver å forkorte en pol i høyre halvplan med et nullpunkt, så kan man ikke etterpå stabilisere systemet som om $N_p = 0$.

Studerer man problemet i tidsplanet ser man også at polens dynamikk ikke forkortes siden transienter ikke går til null som forutsatt i frekvensanalysen, men til uendelig for poler i høyre halvplan. Dette vises med følgende utledning som er hentet fra [3]:

Et system

$$y(s) = h(s)u(s) \quad (8.31)$$

påtrykkes en sinussvingning

$$u(t) = \begin{cases} u_0 \sin \omega t, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} \quad (8.32)$$

som har Laplacetransformasjonen

$$u(s) = \frac{u_0\omega}{s^2 + \omega^2} \quad (8.33)$$

Den resulterende målingen blir

$$y(s) = h(s) \frac{u_0\omega}{s^2 + \omega^2} \quad (8.34)$$

Invers Laplacetransformasjon gir

$$y(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\gamma-j\infty}^{\gamma+j\infty} h(s) \frac{u_0\omega}{s^2 + \omega^2} e^{ts} ds \quad (8.35)$$

Hvis det antas at $h(s)$ har n distinkte poler i $s = s_i$, $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ blir resultatet

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{h(j\omega)u_0\omega e^{j\omega t}}{2j\omega} + \frac{h(-j\omega)u_0\omega e^{-j\omega t}}{-2j\omega} \\ &+ \sum_{i=1}^n \left. \frac{(s - s_i)h(s)u_0\omega e^{ts}}{s^2 + \omega^2} \right|_{s=s_i} \end{aligned} \quad (8.36)$$

I frekvensanalysen antar man at $t \rightarrow \infty$, og at alle poler ligger i venstre halvplan. I så fall vil alle leddene bak summetegnet gå til null fordi $\exp\{ts_i\} \rightarrow 0$ når $t \rightarrow \infty$. Hvis polen $s = s_j$ er i høyre halvplan, vil imidlertid $\exp\{ts_j\} \rightarrow \infty$ og systemet er ustabil, og dette endres ikke uansett hvilke nullpunkter man introduserer i $h(s)$.

I den reguleringstekniske litteratur (f.eks. [22]) ser man ofte påstanden at man ikke må forkorte poler i høyre halvplan fordi den minste unøyaktighet i kompensasjonen medfører ustabilitet. Dette er ikke korrekt siden også perfekt forkorting av en pol i høyre halvplan gir et ustabil system.

Eksempel 8.1 Gitt prosessen

$$\dot{y} = y + u \quad (8.37)$$

Laplacetransformen gir

$$y(s) = \frac{1}{s - 1} u(s) \quad (8.38)$$

Anta at regulatoren

$$h_r(s) = \frac{K_v}{s}(s - 1) \quad (8.39)$$

benyttes. Sløyfetransferfunksjonen blir

$$h_0(s) = \frac{K_v}{s} \frac{1 - s}{1 - s} = \frac{K_v}{s} \quad (8.40)$$

Denne prosessen vil være **ustabil for alle** $K_v \in (-\infty, +\infty)$, hvilket sees av det karakteristiske polynom

$$s^2 + (K_v - 1)s - K_v \quad (8.41)$$

Siden koeffisientene har forskjellig fortegn, er systemet ustabil i følge Rouths kriterium. ■

8.4.5 Kommentar*

Ved bruk av konvensjonelle regulatorer av PID-typen er det åpenbart at poler på den imaginære akse og i høyre halvplan ikke kan forkortes bort. Dette er imidlertid et problem i en del avanserte reguleringsmetoder hvor pol/nullpunkt-forkorting inngår implisitt. Eksempler på dette er alle typer *reset*-regulatorer som minimum-varians og *dead-beat* regulatorer, de vanligste modellreferanse adaptive regulatorer og *loop-transfer-recovery* type regulatorer. Disse regulatorene kan ikke uten videre benyttes for systemer med poler i høyre halvplan eller på den imaginære akse.

8.5 Nullpunkter i høyre halvplan

På bakgrunn av kapittel 8.4.4 er det åpenbart at et nullpunkt i høyre halvplan ikke kan forkortes med en pol i høyre halvplan. Dette har interessante konsekvenser for følgeforholdet.

Et system har sløyfetransferfunksjonen

$$h_0(s) = \frac{t(s)}{n(s)} \quad (8.42)$$

Følgeforholdet blir da

$$M(s) = \frac{h_0(s)}{1 + h_0(s)} = \frac{t(s)}{t(s) + n(s)} \quad (8.43)$$

Legg merke til at nullpunktene i $h_0(s)$ også er nullpunkter i $M(s)$.

Det er en fundamental forskjell på innvirkningen fra nullpunkter i høyre og venstre halvplan på følgeforholdet.

Anta først at $h_0(s)$ har et nullpunkt i $s = -a$ i venstre halvplan: Det er velkjent fra grunnleggende frekvensanalyse for tilbakekoblede systemer at

$$M(j\omega) \approx 1 \quad \text{for} \quad |h_0(j\omega)| \gg 1 \quad (8.44)$$

$$M(j\omega) \approx h_0(j\omega) \quad \text{for} \quad |h_0(j\omega)| \ll 1 \quad (8.45)$$

Følgeforholdet vil altså oppfylle $M(j\omega) \approx 1$ for frekvenser opp til kryssfrequensen som kan velges uavhengig av nullpunktet i $-a$.

Anta så at $h_0(s)$ har et nullpunkt i $s = b$ i høyre halvplan: Dette nullpunktet kan ikke forkortes med en pol, og det vil derfor også være et nullpunkt i følgeforholdet. Spørsmålet er da om det er mulig å undertrykke virkningen av nullpunktet på $M(s)$ ved å ha tilstrekkelig stor forsterkning. Det viser seg at dette ikke er mulig.

- Gitt et åpent stabilt system med et nullpunkt for $s = b$ i høyre halvplan. Anta videre at det er spesifisert at kryssfrequensen skal ligge i et intervall med asymptotisk helning lik -1 på amplitudekurven og med asymptotisk fase større enn -180° i Bodediagrammet. Da er kryssfrequensen begrenset av $\omega_c < b$.

Dette vises ut fra egenskapene til asymptotiske kurver i et Bodediagram: Et nullpunkt i høyre halvplan gir -90° fase, og endrer helningen på amplitudekurven med $+1$. Anta at $\omega_c > b$. Hvis amplitudekurven skal ha asymptotisk helning lik -1 , så må fasekurven ha asymptotisk fase mindre eller lik -270° . ■

Polene i en fysisk prosess kan flyttes ved tilbakekobling, og nullpunkter i venstre halvplan kan elimineres. Nullpunkter i høyre halvplan kan man ikke influere på ved tilbakekobling. De kan bare påvirkes ved å endre prosessen f.eks. ved å flytte målepunktet. I servosystemer med elasticitet mellom pådragsorgan og måleelement kan man endre nullpunkter i høyre halvplan ved å flytte på måleelementene.

Eksempel 8.2 Gitt systemet

$$h(s) = 10000 \frac{-s^2 + 1}{s(s^2 + 10s + 100)} \quad (8.46)$$

som har en pol i origo og to komplekskonjugerte poler med udempet resonansfrekvens lik 100 og relativ demping lik 0.5. Systemet har to nullpunkt i ± 1 som er speilet om den imaginære akse. Systemets Bodediagram er vist i figur 8.6.

Figur 8.6: *Bodediagram for system med nullpunkt i høyre halvplan.*

Det er klart fra Bodediagrammet at det ikke er mulig å stabilisere systemet med seriekompensasjon for en kryssfrekvens høyere enn 1 rad/s. Hvis derivatvirkning innføres for å heve fasen, vil amplitudekurven få positiv helning, og den vil derfor ikke kunne krysse 0 dB-linjen

■

Det er i visse tilfeller mulig å ha en stabil tilbakekobling med en kryssfrekvens som ligger over knekkfrekvensen assosiert med et nullpunkt i høyre halvplan. Dette skal illustreres med følgende eksempel:

Eksempel 8.3 Gitt systemet

$$h_0(s) = K \frac{s-1}{s} \quad (8.47)$$

Den karakteristiske ligningen er

$$(1+K)s - K = 0 \quad (8.48)$$

og i følge Rouths kriterium er systemet stabilt hvis $-1 \leq K \leq 0$. Kryssfrekvensen ω_c gitt av $|h_0(j\omega_c)| = 1$ finnes av

$$|h(j\omega)|^2 = K^2 \frac{\omega^2 + 1}{\omega^2} \quad (8.49)$$

som gir

$$\omega_c^2 = \frac{K^2}{1-K^2} \quad (8.50)$$

hvilket betyr at systemet kan stabiliseres for alle $\omega_c \in (0, +\infty)$ ved å velge en passende $K \in (-1, 0]$.

I Bodediagrammet ser man imidlertid at for $\omega_c > 1$, som er nullpunktets knekkfrekvens, er den asymptotiske helningen på amplitudekurven lik 0, og det er klart at fasemarginen går til null når $\omega_c \gg 1$. Videre er følgefórhóldet

$$M(s) = \frac{1-s}{1+\frac{s}{\omega_c}} \quad (8.51)$$

som ikke er akseptabelt for $\omega_c \gg 1$, siden dette gir $|M(j\omega)| = \omega_c \gg 1$ for alle $\omega > \omega_c$. ■

8.6 Begrensninger på avviksforholdet $N(s)$

Vi skal i det følgende presentere analytiske uttrykk for begrensninger som gjelder for avviksforholdet for tilbakekoblede systemer. Spesielt skal vi se på systemer med poler og nullpunkter i høyre halvplan¹.

Teorem 8.2 (Bodes integralsetning) Gitt et tilbakekoblet system med sløyfetransferfunksjon $h_0(s)$. Anta at $h_0(s)$ ikke har nullpunkter i høyre halvplan, at $h_0(s)$ har N_p poler i høyre halvplan i p_i ($i = 1, \dots, N_p$), og at h_0 har relativ grad større eller lik 2. Da vil avviksforholdet

$$N(s) = \frac{1}{1+h_0(s)}$$

tilfredstille

$$\int_0^\infty \ln |N(j\omega)| d\omega = \pi \sum_{i=1}^{N_p} \operatorname{Re}[p_i] \quad (8.52)$$

¹Dette delkapitlet er utarbeidet av vit.ass. Erling Aarsand Johannessen

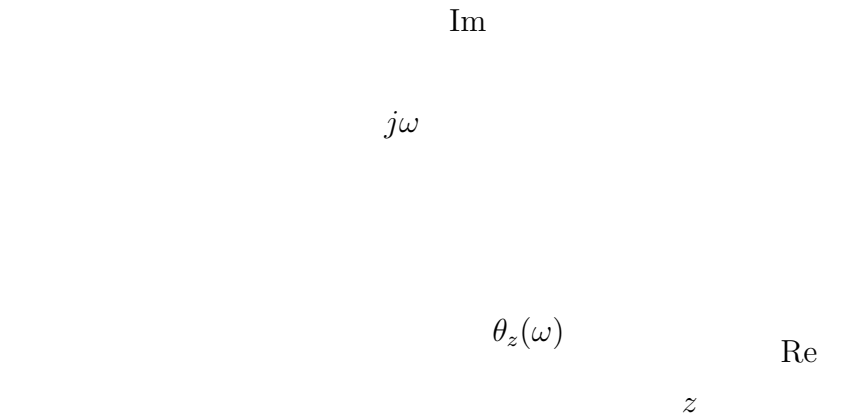
Bevis: Dette er vist i [16, teorem 3]. ■

Anta først at $N_p = 0$, dvs. systemet er stabilt i åpen sløyfe. Da er

$$\int_0^\infty \ln |N(j\omega)| d\omega = 0.$$

Arealet som $|N(j\omega)|$ avgrensner *under* 0 dB-linjen vil da være like stort som det arealet som avgrensnes *over* 0 dB-linjen. Det er vanlig å ha en øvre grense for absoluttverdien $|N(j\omega)|$ til avviksforholdet i visse frekvensområder. Når $|N(j\omega)|$ presses under grensen i dette området, vil $|N(j\omega)|$ øke i et annet område. Dette er kalt vannseng-effekten [11], og analogien er klar.

Hvis nå systemet har poler i høyre halvplan, vil $N_p > 0$. Dette betyr at en større del av integralet $\int_0^\infty \ln |N(j\omega)| d\omega$ må være positivt. Størrelsen er avhengig av hvor langt inn i høyre halvplan polene ligger.



Figur 8.7: Sammenheng mellom z , ω og $\theta_z(\omega)$

Teorem 8.3 Gitt et tilbakekoblet system med sløyfetransferfunksjon $h_0(s)$. Anta at $h_0(s)$ har et enkelt reelt nullpunkt $s = z$ i høyre halvplan og N_p poler i høyre halvplan i p_i ($i = 1, \dots, N_p$). Avviksforholdet $N(j\omega)$ tilfredstiller da

$$\int_0^\infty \ln |N(j\omega)| d\theta_z(\omega) = \frac{\pi}{2} \sum_{i=1}^{N_p} \ln \left| \frac{p_i^* + z}{p_i - z} \right| \quad (8.53)$$

hvor

$$\theta_z(\omega) = \arctan \frac{\omega}{z}$$

og

$$d\theta_z(\omega) = \frac{z}{z^2 + \omega^2} d\omega$$

Bevis: Dette følger av [16, teorem 1]. ■

Sammenhengen mellom z , ω og $\theta_z(\omega)$ er vist i figur 8.7. Forskjellen i ligningene (8.53) og (8.52) ligger i vektfunksjonen

$$\frac{d\theta_z}{d\omega} = \frac{z}{z^2 + \omega^2} \quad (8.54)$$

Vi ser at $d\theta_z/d\omega \rightarrow 0$ når $\omega \rightarrow 0$, slik at et system med nullpunkt i høyre halvplan vil gi en større toppverdi for $|N(j\omega)|$ enn et tilsvarende system uten nullpunkt i høyre halvplan [16].

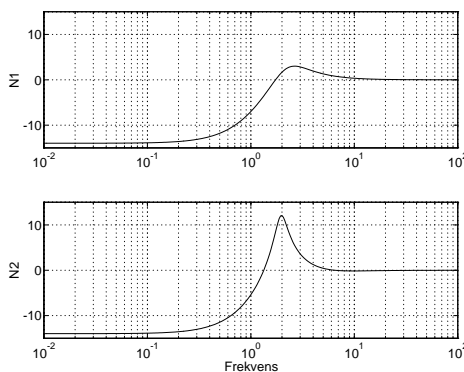
Det kan vises at ligning (8.53) reduseres til (8.52) når $z \rightarrow \infty$.

Talleksempel

Vi illustrerer det foregående med et enkelt talleksempel. Betrakt to systemer med sløyfetransferfunksjoner

$$h_{01}(s) = \frac{4}{(1+s)^2} \quad \text{og} \quad h_{02}(s) = \frac{4}{(1+s)^2} \cdot \frac{1-0.2s}{1+0.2s} \quad (8.55)$$

Her har h_{02} et nullpunkt $s = 5$ i høyre halvplan. Man kan tenke seg at h_{01} har et tilsvarende nullpunkt i venstre halvplan som kanselleres mot en pol.



Figur 8.8: Frekvensrespons for avviksforholdene

Begge systemene er stabile i lukket sløyfe. La $N_1(s)$ og $N_2(s)$ betegne avviksforholdene for de to systemene. I begge tilfeller har vi $N_p = 0$, og ifølge teorem 8.2 og teorem 8.3 må avviksforholdene tilfredstille henholdsvis

$$\int_0^{\infty} \ln |N_1(j\omega)| d\omega = 0 \quad (8.56)$$

og

$$\int_0^{\infty} \ln |N_2(j\omega)| \frac{5}{5^2 + \omega^2} d\omega = 0 \quad (8.57)$$

Figur 8.8 viser frekvensresponsene til de to avviksforholdene. h_{02} har et nullpunkt i $s = 5$, og dermed vil vektfunksjonen $5/(5^2 + \omega^2)$ være mye mindre enn 1 for frekvenser som er mye større enn $\omega = 5$. Her er sløyfetransferfunksjonen valgt slik at $|N_2(j\omega)|$ er mye mindre enn 1 for $\omega < 1$, og dermed må $|N_2(j\omega)| \gg 1$ i et frekvensintervall mellom 1 rad/s og 5 rad/s. h_{01} har ikke nullpunkt i høyre halvplan, og vektfunksjonen er derfor konstant og lik 1. Dermed er det tilstrekkelig at $|N_1(j\omega)|$ er *litt* større enn 1 for

alle $\omega \gg 1$. Vi legger merke til at $|N_2(j\omega)|$ har en maksimalverdi på 12 dB, som betyr at systemet har en kraftig resonans ved kryssfrekvensen, mens $|N_1(j\omega)|$ er mindre eller lik 3 dB, som gir en akseptabel ytelse.

8.7 Invertert pendel

8.7.1 Dynamisk modell

En invertert pendel er en ustabil prosess. I det følgende skal en dynamisk modell for en invertert pendel utvikles, og et reguleringsystem presenteres.

Anta at pendelen er montert på en vogn som posisjoneres med en likestrømsmotor. Vognens masse er m_v , posisjonen betegnes med x , og kraften på vognen fra likestrømsmotoren betegnes med F . Motoren er strømstyrt og har modellen

$$J_m \ddot{\theta}_m = K_T u - T_L \quad (8.58)$$

hvor θ_m er motorvinkelen, u er pådraget, K_T er momentkonstanten og J_m er motorens treghetsmoment. T_L er lastmomentet som skyldes vognen. Motoren antas å trekke vognen med en snor som kan dra vognen begge veier. Snoren løper over et hjul som er koblet direkte på motorakslingen. Dette hjulet har radius r . Lastmomentet er derfor

$$T_L = rF \quad (8.59)$$

mens sammenhengen mellom rotasjonsbevegelse og translasjonsbevegelse er gitt av

$$\dot{x} = r\dot{\theta}_m \quad (8.60)$$

Pendelen er et massepunkt med masse m_p i enden av et stag med lengde L . Staget antas å være masseløst. Pendelens vinkelutslag fra vertikal stilling oppover betegnes med θ_p . Systemet er vist i fig. 8.9.

Newtons lov for vognen gir

$$(m_v + m_p)\ddot{x} + m_p L \ddot{\theta}_p \cos \theta_p = F \quad (8.61)$$

Innsetting av motorligningen og lign. (8.59) gir ligningen

$$(m_v + m_p)\ddot{x} + m_p L \ddot{\theta}_p \cos \theta_p = \frac{1}{r}[-J_m \ddot{\theta}_m + K_T u] \quad (8.62)$$

Innsetting av $\ddot{\theta}_m = \ddot{x}/r$ og linearisering om $\theta_p = 0$ ved å sette $\cos \theta_p \approx 1$ resulterer i

$$(m_v + m_p + \frac{1}{r^2} J_m)\ddot{x} + m_p L \ddot{\theta}_p = \frac{K_T}{r} u \quad (8.63)$$

Spinnsatsen for pendelen gir

$$m_p L^2 \ddot{\theta}_p + m_p L \ddot{x} = m_p L g \sin \theta_p \quad (8.64)$$

hvor g er tyngdeakselerasjonen. Modellen kan lineariseres om $\theta_p = 0$ ved å sette $\sin \theta_p \approx \theta_p$. Den lineariserte ligningen skrives

$$\ddot{\theta}_p + \frac{1}{L} \ddot{x} = \Omega_p^2 \theta_p \quad (8.65)$$

Figur 8.9: *Invertert pendel*

hvor $\Omega_p^2 = g/L$.

Modellen består av to koblede ligninger, og kan skrives

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{L} \\ m_p L & (m_v + m_p + \frac{1}{r^2} J_m) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\theta}_p \\ \ddot{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Omega_p^2 \theta_p \\ \frac{K_T}{r} u \end{pmatrix} \quad (8.66)$$

Det er karakteristisk for mekaniske systemer bestående av stive legemer at akselerasjonene er koblet gjennom en massematrise som her er

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{L} \\ m_p L & (m_v + m_p + \frac{1}{r^2} J_m) \end{pmatrix} \quad (8.67)$$

Denne matrisen er invertierbar og oppfyller

$$\mathbf{M}^{-1} = \frac{1}{m_v + \frac{1}{r^2} J_m} \begin{pmatrix} (m_v + m_p + \frac{1}{r^2} J_m) & -\frac{1}{L} \\ -m_p L & 1 \end{pmatrix} \quad (8.68)$$

Akselerasjonene kan derfor løses ut, og modellen skrives

$$\ddot{\theta}_p = \Omega_0^2 \theta_p - b_1 u \quad (8.69)$$

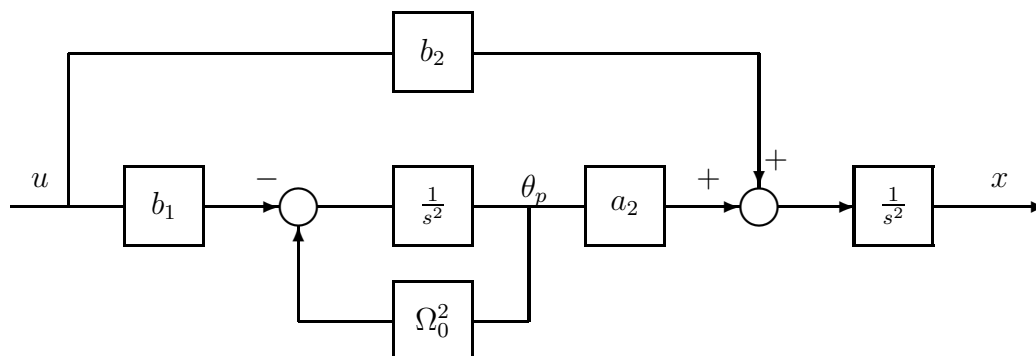
$$\ddot{x} = a_2 \theta_p + b_2 u \quad (8.70)$$

hvor konstantene er gitt av

$$\Omega_0^2 = \frac{m_v + m_p + \frac{1}{r^2} J_m}{m_v + \frac{1}{r^2} J_m} \Omega_p^2 \quad (8.71)$$

$$a_2 = -\frac{m_p L \Omega_p^2}{m_v + \frac{1}{r^2} J_m} \quad (8.72)$$

$$b_1 = \frac{K_T}{r L (m_v + \frac{1}{r^2} J_m)} \quad (8.73)$$



Figur 8.10: Blokkdiagram for invertert pendel.

$$b_2 = \frac{K_T}{r(m_v + \frac{1}{r^2}J_m)} \quad (8.74)$$

Blokkdiagrammet er vist i figur 8.10.

Legg merke til at $\Omega_0^2 > \Omega_p^2$.

8.7.2 Regulator for pendel

Regulatordesign ved polplassering

Modellen (8.69) og (8.70) omfatter to variable x og θ_p som skal styres, men bare ett pådrag². Det er derfor ikke helt innlysende hvordan prosessen skal styres. Det er imidlertid klart at θ_p må styres med høy båndbredde slik at ikke pendelvinkelen blir for stor og det blir umulig å rette den opp igjen. Det er ikke nødvendig å styre vognens posisjon like raskt. Så lenge vognen ikke går i endestopp er det ikke kritisk om det blir et avvik.

Følgende løsning foreslås her:

1. Pendelens vinkel θ_p styres i en indre sløyfe med høy båndbredde.
2. Vognens posisjon x styres i en ytre sløyfe med lavere båndbredde.

Laplacetransformasjon av modellen for pendelen gir

$$\theta_p(s) = -\frac{b_1}{s^2 - \Omega_0^2}u = -\frac{b_1}{(s + \Omega_0)(s - \Omega_0)}u \quad (8.75)$$

som viser at prosessen har to reelle poler, den ene i høyre halvplan og den andre symmetrisk om origo i venstre halvplan.

Følgende regulator foreslås:

$$u = -\frac{1}{b_1}(k_1\Delta\theta + k_2\Delta\dot{\theta}) \quad (8.76)$$

hvor $\Delta\theta = \theta_0 - \theta_p$ er reguleringsavviket, θ_0 er referansen til pendelvinkelen θ_p og k_1 og k_2 er positive konstanter. Det resulterende systemet kan beskrives ved

$$\theta_p(s) = \frac{k_1 + k_2s}{s^2 + k_2s + k_1 - \Omega_0^2}\theta_0(s) \quad (8.77)$$

² Dette kan betegnes som et multivariabelt system som kan styres ved bruk av teorien for multivariabel reguleringsystemer. Det er imidlertid også mulig å styre prosessen ved bruk av monovariabelteknikker.

Systemet har altså følgeforholdet

$$M_p(s) = \frac{\theta_p}{\theta_0}(s) = \frac{k_1 + k_2 s}{s^2 + k_2 s + k_1 - \Omega_0^2} \quad (8.78)$$

I følge Rouths kriterium må $k_1 > \Omega_0^2$ for at systemet skal være stabilt.

Anta at det er gitt at polene skal ha udempet resonansfrekvens $\omega_0^2 \gg \Omega_0^2$, og at relativ damping skal være ζ_0 . Regulatorforsterkningene settes derfor til

$$k_1 = \Omega_0^2 + \omega_0^2 \quad (8.79)$$

$$k_2 = 2\zeta_0\omega_0 \quad (8.80)$$

som gir følgeforhold

$$M_p(s) = \frac{\Omega_0^2 + \omega_0^2 + 2\zeta_0\omega_0 s}{s^2 + 2\zeta_0\omega_0 s + \omega_0^2} \quad (8.81)$$

og avviksforhold

$$N_p(s) = 1 - M_p(s) = \frac{s^2 - \Omega_0^2}{s^2 + 2\zeta_0\omega_0 s + \omega_0^2} \quad (8.82)$$

For frekvenser opp til båndbredden ω_0 gjelder

$$|M_p(j\omega)| = \frac{\Omega_0^2 + \omega_0^2}{\omega_0^2} \approx 1 \quad \text{for } \omega \ll \omega_0 \quad (8.83)$$

siden $\omega_0^2 \gg \Omega_0^2$. For avviksforholdet gjelder tilnærmelsen

$$|N_p(j\omega)| = \begin{cases} \frac{\Omega_0^2}{\omega_0^2} \ll 1 & \omega \ll \Omega_0 \\ \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \ll 1 & \Omega_0 \ll \omega \ll \omega_0 \end{cases} \quad (8.84)$$

Avviksforholdet er lite for frekvenser under ω_0 . Legg merke til at avviksforholdet har et nullpunkt i høyre halvplan som følge av polen i høyre halvplan. Dette resulterer i en nedre begrensning Ω_0^2/ω_0^2 på $|N_p(j\omega)|$ ved lave frekvenser.

Regulatordesign med Bodediagram

Det er mulig å bruke Bodediagram ved regulatordesign for prosessen, som har transferfunksjon

$$h(s) = \frac{b_1}{(s + \Omega_0)(s - \Omega_0)} \quad (8.85)$$

Modellen bringes først over på formen

$$h(s) = K \frac{1}{(1 + \frac{s}{\Omega_0})(\frac{s}{\Omega_0} - 1)} \quad (8.86)$$

hvor $K = b_1/\Omega_0^2$.

Den asymptotiske amplitudekurven har helning 0 opp til $\omega = \Omega_0$, og deretter -2 . Fasen er konstant lik -180° . Dette sees forøvrig av $h(j\omega) = 1/(-\omega^2 - \Omega_0^2)$ som er reell og negativ.

For å heve fasen trengs en PD-regulator

$$h_r(s) = K_p(1 + T_d s) \quad (8.87)$$

Kryssfrekvensen må velges slik at $\omega_c \gg \Omega_0$ for at systemet skal få en akseptabel forsterkning ved lave frekvenser.

For at systemet skal være stabilt må $K_p K > 1$. Dette kriteriet kan vises å være ekvivalent med stabilitetskriteriet som ble funnet ved bruk av polplassering. Sammenhengen mellom konstantene er gitt av $K_p = k_1/b_1$ og $K = b_1/\Omega_0^2$. Stabilitetskravet på k_1 var $k_1 > \Omega_0^2$, som betyr at $K_p K > \Omega_0^2/\Omega_0^2 = 1$.

8.7.3 Styring av vognen

Vognen styres med tilbakekobling i en ytre sløyfe. Regulatoren til den indre sløyfen designes først, og prosessen som skal reguleres av den ytre sløyfen er den fysiske prosessen med den indre sløyfen. Pådraget i ytre sløyfe er referansen θ_0 til den indre sløyfen.

Pådraget er

$$u(s) = -\frac{1}{b_1}(k_1 + k_2 s)\Delta\theta(s) \quad (8.88)$$

Innsetting av $\Delta\theta(s) = N_p(s)\theta_0(s)$ gir

$$u(s) = -\frac{1}{b_1}(k_1 + k_2 s)N_p(s)\theta_0(s) \quad (8.89)$$

Videre er

$$\theta_p(s) = M_p(s)\theta_0(s) \quad (8.90)$$

Innsatt i lign. (8.70) gir dette

$$s^2 x(s) = [a_2 M_p(s) - \frac{b_2}{b_1}(k_1 + k_2 s)N_p(s)]\theta_0(s) \quad (8.91)$$

Fra lign. (8.82) og (8.78) finnes sammenhengen

$$(k_1 + k_2 s)N_p(s) = (s^2 - \Omega_0^2)M_p(s) \quad (8.92)$$

mens lign. (8.73) og (8.74) gir $b_2/b_1 = L$. Modellen for vognen kan derfor skrives

$$s^2 x(s) = [a_2 - L(s^2 - \Omega_0^2)]M_p(s)\theta_0(s) \quad (8.93)$$

Dette uttrykket kan forenkles ved å observere at

$$\Omega_0^2 + a_2/L = \frac{m_v + m_p + \frac{1}{r^2}J_m}{m_v + \frac{1}{r^2}J_m}\Omega_p^2 - \frac{m_p\Omega_p^2}{m_v + \frac{1}{r^2}J_m} = \Omega_p^2 \quad (8.94)$$

hvilket følger av lign. (8.71) og (8.72). Dette gir

$$x(s) = -L\frac{s^2 - \Omega_p^2}{s^2}M_p(s)\theta_0(s) \quad (8.95)$$

Ut fra utledningen over har resultatet, lign. (8.95), en overraskende enkel form. Ligningen kan også finnes ved Laplacetransformasjon av lign. (8.69) og (8.70) som gir

$$\theta_p(s) = -\frac{b_1}{s^2 - \Omega_0^2}u(s) \quad (8.96)$$

og

$$s^2 x(s) = a_2 \theta_p(s) + b_2 u(s) \quad (8.97)$$

Innsetting av

$$u(s) = -\frac{s^2 - \Omega_0^2}{b_1} \theta_p(s) \quad (8.98)$$

og $b_2/b_1 = L$ gir

$$\begin{aligned} s^2 x(s) &= [a_2 - L(s^2 - \Omega_0^2)] \theta_p(s) \\ &= -L \left[s^2 - \left(\Omega_0^2 - \frac{m_p \Omega_p^2}{m_v + \frac{1}{r^2} J_m} \right) \right] \theta_p(s) \end{aligned} \quad (8.99)$$

$$= -L(s^2 - \Omega_p^2) \theta_p(s) \quad (8.100)$$

$$(8.101)$$

Lign. (8.95) fremkommer da ved å sette inn lign. (8.90) og dividere på s^2 .

Båndbredden ω_c i den ytre sløyfen begrenses av nullpunktet $s = \Omega_p$ i høyre halvplan slik at $\omega_c < \Omega_p$. I dette frekvensområdet er $M_p \approx 1$, og

$$x(s) = -L \frac{s^2 - \Omega_p^2}{s^2} \theta_0(s) \quad (8.102)$$

En passende regulator til vognen er derfor

$$\theta_0 = -\frac{1}{L} (g_1 \Delta x + g_2 \Delta \dot{x}) \quad (8.103)$$

hvor

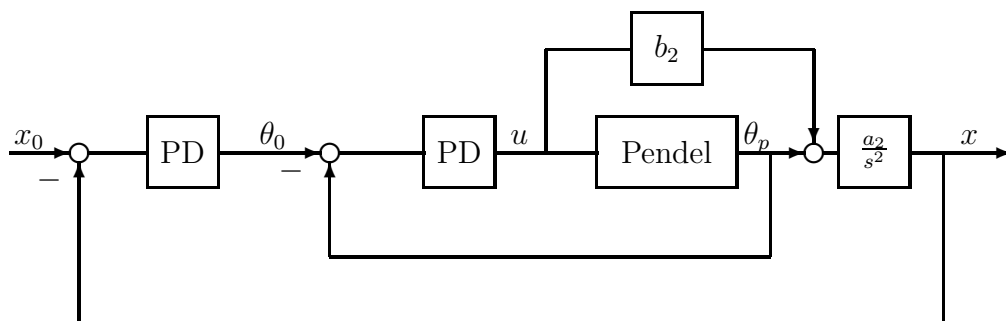
$$g_1 = \omega_c^2 \quad (8.104)$$

og

$$g_2 = 2\zeta_c \omega_c \quad (8.105)$$

som gir et lukket system hvor polene har udempet resonansfrekvens ω_c og relativ demping ζ_c . I et Bodediagram vil man finne at kryssfrequensen er tilnærmet lik ω_c .

Det endelige systemet er vist i figur 8.11.



Figur 8.11: Blokkdiagram som viser styresystem for invertert pendel med indre og ytre sløyfe.

8.8 MATLAB-eksempel

Nyquistdiagram av P- og PD-regulator på autopilot (fig. 8.5) er generert med script-filen:

```
k = 0.022; t1 = 38; t2 = 16; t3 = 192;
t = 14*k*([38 1]);
n = conv([16 1 0],[192 -1]);

w = logspace(-2,2,500);

tpd = 20*k*([38 1]);
npd = conv([1.6 1 0],[192 -1]);

nyquist(tpd,npd,w);hold on
nyquist(t,n,w);hold off

gtext('P')
gtext('PD')
```

Kapittel 9

Foroverkobling

9.1 Foroverkobling fra referansen

Foroverkobling fra referansen kan i mange tilfeller gi en kraftig forbedring i ytelse i et servosystem. Dette er spesielt tilfelle hvis servosystemets dynamiske modell er nøyaktig beskrevet. Tilbakekoblingen kompensere for unøyaktigheter i modellen og ukjent støypåvirkning, mens en foroverkobling er velegnet til å kompensere for fenomener som er nøyaktig modellert. Hvis den dynamiske modellen til et system er perfekt kjent, kan perfekt styring oppnås uten tilbakekobling ved å anvende ideell foroverkobling. I den virkelige verden er det imidlertid svært sjelden at prosesser er så nøyaktig beskrevet, og tilbakekobling brukes derfor i stor grad i servosystemer.

9.1.1 Ideell foroverkobling

En ideell foroverkobling fra referansen i et servosystem baseres på den inverse transferfunksjonen til systemet. Anta at et system er beskrevet ved

$$y(s) = h(s)u(s) \quad (9.1)$$

hvor $y(t)$ er måling og

$$u(t) = u_t(t) + u_f(t) \quad (9.2)$$

er pådrag, $u_t(t)$ er tilbakekoblingen og $u_f(t)$ er foroverkoblingen. Systemet skal følge referansen $y_0(t)$. Anta at prosessen er perfekt beskrevet og uten støypåvirkning, og at reguleringsavviket

$$e(t) = y_0(t) - y(t) \quad (9.3)$$

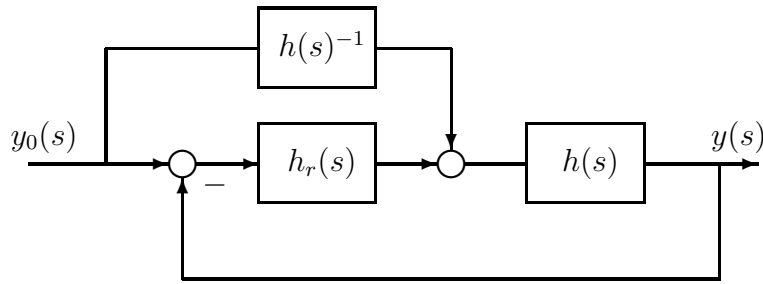
har initialverdi lik null. Da vil foroverkoblingen

$$u_f(s) = h^{-1}(s)y_0(s) \quad (9.4)$$

gi perfekt følging og betegnes derfor som en **ideell foroverkobling** fra referansen. Blokkdiagrammet for systemet med ideell foroverkobling er vist i figur 9.1. Legg merke til at den ideelle foroverkoblingen finnes uavhengig av tilbakekoblingen $u_t(t)$.

Eksempel 9.1 Gitt prosessen

$$y(s) = \frac{1}{s^2}u(s) \quad (9.5)$$



Figur 9.1: Ideell foroverkobling fra referansen

og referansen $y_0(t)$. Den ideelle foroverkobling er her

$$u_f(s) = s^2 y_0(s) \quad (9.6)$$

som er den dobbeltderiverte av referansen $y_0(t)$.

1. Anta at $y_0(t)$ er generert ved

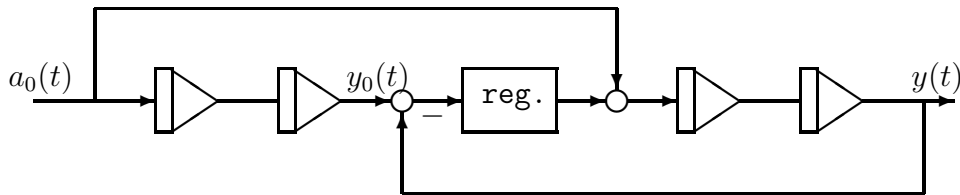
$$y_0(t) = y_0(t_0) + \int_{t_0}^t \int_{t_0}^{\sigma} a_0(\tau) d\tau d\sigma \quad (9.7)$$

hvilket vil si at den dobbeltderiverte av referansen er spesifisert som $a_0(t)$ og $y_0(t)$ beregnes ved å integrere opp $a_0(t)$ to ganger. Dette er relativt vanlig i robotstyring.

Den ideelle foroverkoblingen kan da implementeres ved å bruke

$$u_f(t) = a_0(t) \quad (9.8)$$

som vist i figur 9.2.



Figur 9.2: Ideell foroverkobling fra akselerasjonsreferansen. Legg merke til at den ideelle foroverkoblingen er realiserbar.

2. Anta at referansen $y_0(t)$ er et signal fra et måleinstrument som f.eks. en radar eller et kamerasystem ved følgende av et objekt i bevegelse. I dette tilfelle vil referansen inneholde støy, og derivasjon to ganger vil kunne gi kraftig støypåvirkning ved høye frekvenser. Det vil derfor neppe være gunstig å bruke en ideell foroverkobling. En god løsning kan være å derivere $y_0(t)$ opp til en passende frekvens som vil kunne gi god ytelse hvis referansen varierer med lave frekvenser.

■

Følgeforhold og avviksførelse

En prosess er beskrevet med transferfunksjonen

$$y(s) = h(s)u(s) \quad (9.9)$$

Tilbakekoblingen er

$$u_t(s) = h_r(s)e(s) \quad (9.10)$$

hvor $e(t) = y_0(t) - y(t)$. Systemet har foroverkobling

$$u_f(s) = h_f(s)y_0(s) \quad (9.11)$$

Under disse forutsetninger skal følgeforhold og avviksførelse for systemet finnes. Målingen er gitt av

$$y(s) = h(s)[u_t(s) + u_f(s)] = h_0(s)[y_0(s) - y(s)] + h(s)h_f(s)y_0(s) \quad (9.12)$$

Dette gir

$$[1 + h_0(s)]y(s) = [h_0(s) + h(s)h_f(s)]y_0(s) \quad (9.13)$$

og dermed finnes følgeforholdet ved følgende utregning:

$$M(s) = \frac{y}{y_0}(s) = \frac{h_0(s) + h(s)h_f(s)}{1 + h_0(s)} \quad (9.14)$$

$$= \frac{h_0(s)}{1 + h_0(s)} \left[1 + \frac{h_f(s)}{h_r(s)} \right] \quad (9.15)$$

hvor det er brukt at $h_0(s) = h(s)h_r(s)$. Med ideell forovekobling $h_f(s) = h^{-1}(s)$ ser vi av (9.14) at $M(s) = 1$ for alle s . Dette betyr at målingen følger referansen for alle frekvenser hvis systemet har null initielt avvik, dvs. $e(t_0) = 0 \Rightarrow e(t) = 0$ for alle $t \geq t_0$.

Videre er

$$N(s) = \frac{e}{y_0}(s) = \frac{y_0 - y}{y_0}(s) = 1 - M(s) \quad (9.16)$$

Ved bruk av (9.14) gir dette

$$N(s) = 1 - \frac{h_0(s) + h(s)h_f(s)}{1 + h_0(s)} = \frac{1}{1 + h_0(s)} [1 - h(s)h_f(s)] \quad (9.17)$$

Med ideell forovekobling fås $N(s) = 0$ for alle s . En interessant konsekvens av dette er at med ideell foroverkobling gjelder

$$[1 + h_0(s)]e(s) = 0 \quad (9.18)$$

som betyr at reguleringsavviket e ikke påvirkes av referansen y_0 , og at et transient reguleringsavvik går til null med dynamikk gitt av $1 + h_0(s)$.

Eksempel 9.2 Et ledd i en industrirobot beskrives med modellen¹

$$\ddot{q}(t) = u(t) \quad (9.19)$$

¹Denne modellen er nøyaktig den modellen man får om man benytter ulineær dekopling på en robot med strømstyrte likestrømsmotorer.

hvor $q(t)$ er leddvinkelen og $u(t)$ er pådraget. Akselerasjonsreferansen er gitt ved $\ddot{q}_0(t)$ som er kontinuerlig med hensyn på t , og hastighetsreferansen $\dot{q}_0(t)$ og posisjonsreferansen $q_0(t)$ genereres ved å integrere opp $\ddot{q}_0(t)$.

Ideell foroverkobling

$$u_f(t) = \ddot{q}_0(t) \quad (9.20)$$

brukes. Legg merke til at denne foroverkoblingen er realiserbar siden referansen er spesifisert på akselerasjonsnivå. Hvis referansen hadde vært spesifisert i form av en vilkårlig funksjon $q_0(t)$, eller hvis posisjonsreferansen ble generert fra et målesignal, ville ikke den ideelle foroverkoblingen vært realiserbar.

Anta at tilbakekoblingen er

$$u_t(s) = h_r(s)\Delta q(s) \quad (9.21)$$

hvor $\Delta q(t) = q_0(t) - q(t)$, og $h_r(s)$ er transferfunksjonen til regulatoren. Da er

$$(1 + h_r(s)\frac{1}{s^2})(q_0(t) - q(t)) = 0 \quad (9.22)$$

som betyr at $q(t) \rightarrow q_0(t)$ når $t \rightarrow \infty$, forutsatt at det lukkede system er asymptotisk stabilt.

Hvis hastigheten måles er et vanlig valg

$$u_t(t) = \omega_b^2 \Delta q(t) + 2\omega_b \Delta \dot{q}(t) \quad (9.23)$$

som gir pådraget

$$u(t) = u_t(t) + u_f(t) = \omega_b^2 \Delta q(t) + 2\omega_b \Delta \dot{q}(t) + \ddot{q}_0(t) \quad (9.24)$$

Det lukkede systems dynamikk blir

$$\frac{s^2 + 2\omega_b s + \omega_b^2}{s^2} \Delta q(s) = 0 \quad (9.25)$$

⇓

$$(s^2 + 2\omega_b s + \omega_b^2) \Delta q(s) = 0 \quad (9.26)$$

Dette betyr at det lukkede system er kritisk dempet med to poler i $-\omega_b$. ω_b kan dermed sies å være båndbredden til systemet. Videre er det klart at $q(t)$ svinger inn til $q_0(t)$ med en dobbel tidskonstant i $T = 1/\omega_b$. ■

Eksempel 9.3 Hvis roboten i eksempel 9.2 ikke har hastighetsmåling, benyttes tilbakekoblingen

$$u_t(s) = K_p \frac{1 + T_d s}{1 + T_f s} \Delta q(s) \quad (9.27)$$

hvor $K_p = \omega_b^2$, $T_d = 2/\omega_b$ og $T_f \ll T_d$.

Med ideell foroverkobling $u_f(t) = \ddot{q}_0(t)$ fås tilnærmet samme resultat som med tilbakekoblingen (9.23).

Dynamikken blir

$$(1 + K_p \frac{1 + T_d s}{s^2(1 + T_f s)}) \Delta q(s) = 0 \quad (9.28)$$

⇕

$$(T_f s^3 + s^2 + 2\omega_b s + \omega_b^2) \Delta q(s) = 0 \quad (9.29)$$

som er tilnærmet lik lign. (9.26) for frekvenser opp til filterfrekvensen $1/T_f$. ■

9.1.2 Foroverkobling ved seriekompensasjon

Ved implementering og i blant ved analyse kan det være enklere å betrakte en foroverkobling fra referansen som en seriekompensasjon eller modifisering av referansen. Dette behandles nærmere i dette kapittelet.

Gitt systemet

$$y(s) = h(s)u(s) \quad (9.30)$$

med tilbakekoblingen

$$u_t(s) = h_r(s)[y_0(s) - y(s)] \quad (9.31)$$

og foroverkoblingen

$$u_f(s) = h_f(s)y_0(s) \quad (9.32)$$

slik at det totale pådraget er

$$u = u_t + u_f \quad (9.33)$$

Teorem 9.1 Anta at $h_r(s)$ ikke har nullpunkter i det lukkede høyre halvplan. La

$$y_m(s) = \left[1 + \frac{h_f(s)}{h_r(s)}\right]y_0(s) \quad (9.34)$$

være en modifisert referanse. Da vil regulatoren

$$u(s) = h_r(s)[y_m(s) - y(s)] \quad (9.35)$$

gi både tilbakekoblingen (9.31) og foroverkoblingen (9.32).

Dette vises ved innsetting av lign. (9.34) i lign. (9.35):

$$\begin{aligned} u(s) &= h_r(s)[(1 + h_r^{-1}(s)h_f(s))y_0(s) - y(s)] \\ &= h_r(s)(y_0(s) - y(s)) + h_f(s)y_0(s) \end{aligned} \quad (9.36)$$

hvilket skulle vises. ■

De to realiseringene av foroverkoblingen er vist i figur 9.3.

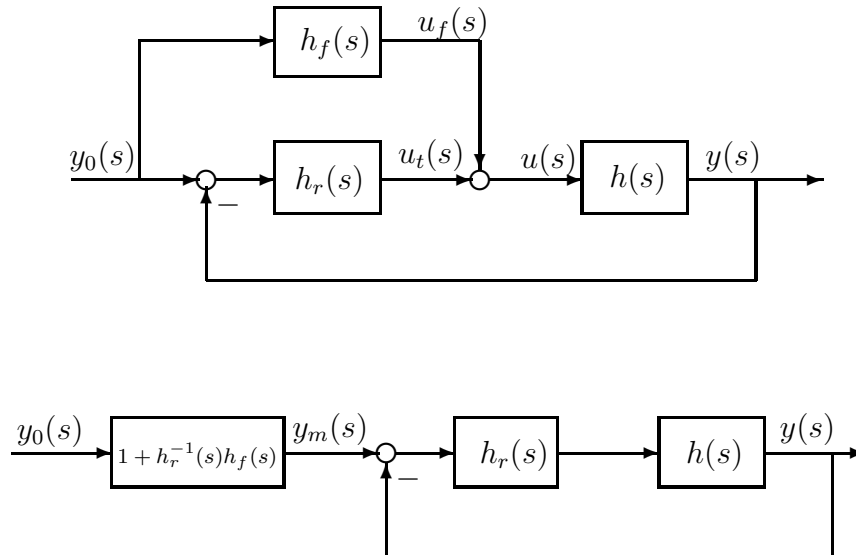
Eksempel 9.4 En hydraulisk motor er beskrevet ved modellen

$$\frac{y}{u}(s) = h(s) = \frac{K}{s(1 + 2\zeta_h \frac{s}{\omega_h} + \frac{s^2}{\omega_0^2})} \quad (9.37)$$

En ideell foroverkobling

$$u_f^I = \frac{s(1 + 2\zeta_h \frac{s}{\omega_h} + \frac{s^2}{\omega_h^2})}{K} y_0(s) \quad (9.38)$$

kan neppe brukes siden den tredjederiverte av posisjonen (betegnes rykk) må være gitt, eller den må beregnes ved derivasjon. Videre vil denne foroverkoblingen være meget følsom for variasjoner i parameterne ω_h og ζ_h som kan variere. Hvis f.eks. ω_h er feil, vil den hydrauliske resonansen i prosessen kunne eksiteres kraftig. Videre vil det vanligvis ikke være interessant at foroverkoblingen skal være effektiv for frekvenser



Figur 9.3: *Prosess med tilbakekobling og foroverkobling fra referansen. Realisering av foroverkobling ved vanlig foroverkobbingsstruktur og med seriekompensasjon.*

over kryssfrekvensen. Dette krever stor effekt, og både mekaniske resonanser og den hydrauliske resonansen vil kunne eksiteres.

En egnet foroverkobling kan være

$$h_f(s) = \frac{1}{K} s \quad (9.39)$$

Denne foroverkoblingen er realiserbar hvis hastighetsreferansen \dot{y}_0 er gitt². Med $h_r = K_p$ blir det resulterende følgeforholdet

$$M(s) = \frac{h_0(s)}{1 + h_0(s)} \left(1 + \frac{s}{K_v}\right) \quad (9.40)$$

hvor $K_v = K_p K$ er hastighetskonstanten. Hastighetsforoverkobling gir altså et nullpunkt med knekkfrekvens $\omega = K_v$ som er tilnærmet lik kryssfrekvensen.

I kapittel 3.6.4 ble det angitt at hvis $\zeta_h < 0.5$, så er

$$\frac{h_0(s)}{1 + h_0(s)} = \frac{1}{\left(1 + \frac{s}{K_v}\right) \left(1 + 2\zeta_{nc} \frac{s}{\omega_{nc}} + \frac{s^2}{\omega_{nc}^2}\right)} \quad (9.41)$$

en god tilnærmelse for $h_0/(1 + h_0)$ (se lign. (3.71)). Foroverkoblingen resulterer i forking av polen i $-K_v$, siden innsetting av lign. (9.40) i lign. (9.41) gir

$$M(s) = \frac{1}{1 + 2\zeta_{nc} \frac{s}{\omega_{nc}} + \frac{s^2}{\omega_{nc}^2}} \quad (9.42)$$

Følgeforholdet får dermed første knekkfrekvens økt fra K_v til ω_{nc} , og båndbredden definert som evnen til å følge referansen blir dermed høyere.

²Hvis hastighetsreferansen ikke er gitt kan en frekvensbegrenset derivasjon $h_f(s) = (1/K)s/(1+Ts)$ brukes for passende T .

Det er imidlertid slett ikke sikkert at det er ønskelig med økt båndbredde, siden det resulterende systemet kan bli oscillatorisk. Den hydrauliske motorens følgeforhold er som vist i fig. 3.13 i kapittel 3.6.4 når $\omega_h = 400$ rad/s, $\zeta = 0.1$ og $K_v = 40$. Dette gir en forsterkningsmargin på 6 dB hvilket fremgår av kapittel 3.6.2. Med hastighetsforoverkobling som gitt av lign. (9.39), blir følgeforholdet som vist i figur 9.4.

Figur 9.4: *Bodediagram for følgeforholdet til en hydraulisk posisjonservo med foroverkobling fra hastighetsreferansen.*

Fig. 3.13 viser følgeforholdet for samme system uten foroverkobling. Sammenligning viser at foroverkoblingen øker båndbredden, men systemet får en så høy resonans ved den hydrauliske resonansfrekvensen at det ikke er akseptabelt. Det er forøvrig et ofte forekommende problem at hvis man forbedrer en parameter som beskriver ytelsen til systemet, så forverres en annen parameter. ■

9.1.3 Implementering i reguleringsystem

Hvis man kjøper en motor med hastighetsregulator er det relativt vanlig at grensesnittet er hastighetsreferanse inn og målinger ut, og det er ingen separat inngang for en foroverkobling. Også i kommersielle regulatorer kan det forekomme at det ikke er noen inngang for foroverkobling. Dette er ikke noe stort problem hvis man vet regulatorens transferfunksjon. Man kan bruke modifisert referanse som er summen av referansen og foroverkoblingen multiplisert med den inverse regulatoren.

Eksempel 9.5 En motor er utstyrt med en hastighetsregulator med båndbredde 50 Hz. En posisjonssløyfe skal implementeres med hastighetssløyfen som en indre sløyfe.

For frekvenser under 50 Hz har motoren med hastighetssløyfe transferfunksjonen

$$\frac{y}{u}(s) = \frac{1}{s} \quad (9.43)$$

hvor $y(t)$ er posisjonen og $u(t)$ er pådraget, som er referansen til hastighetssløyfen.

Posisjonsreferansen er $y_0(t)$ og hastighetsreferansen $v_0(t) = \dot{y}_0(t)$ er gitt. En ideell foroverkobling kan da implementeres med

$$u_f(t) = v_0(t) \quad (9.44)$$

Her bør det bemerkes at denne foroverkoblingen er ideell for den forenklete modellen gitt av lign. (9.43) utledet under forutsetning av at hastighetssløyfen er perfekt.

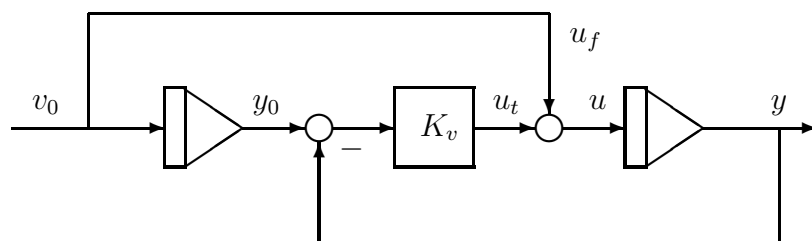
Tilbakekoblingen er

$$u_t(t) = K_v(y_0(t) - y(t)) \quad (9.45)$$

Det totale pådraget blir

$$u(t) = K_v(y_0(t) - y(t)) + v_0(t) \quad (9.46)$$

Blokkdiagrammet er vist i figur 9.5.



Figur 9.5: Posisjonssløyfe med ideell hastighetsforoverkobling

Anta at posisjonssløyfen er implementert i elektronikk som en P-regulator (lign. 9.45) hvor K_v kan velges og hvor eneste inngang er referansen $y_0(t)$. Foroverkoblingen kan da inkluderes ved å modifisere referansen til

$$y_m(t) = y_0(t) + \frac{v_0(t)}{K_v} \quad (9.47)$$

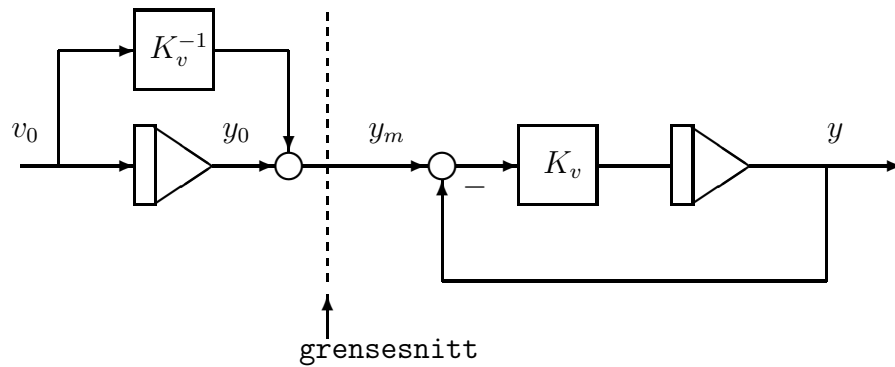
som gir regulatoren i lign. (9.46). Løsningen er vist i figur 9.6

■

9.2 Følging av preprogrammert referanse

I mange industrielle anvendelser av motorstyring er referansen preprogrammert hvilket vil si at referansen er kjent på forhånd for hele tidsintervallet. Dette er tilfelle for numerisk styrte verktøymaskiner, for tegnemaskiner og for industriroboter. Det er mulig å utnytte at fremtidige verdier av referansen er kjent for å oppnå bedre ytelse for et følgesystem.

Dette er interessant i sammenheng med kausalitetsprinsippet for fysiske systemer.



Figur 9.6: Foroverkobling ved seriekompensasjon

9.2.1 Kausalitet

Anta at et system har inngangssignal $u(t)$ og utgangssignal $y(t)$. Systemet kan være lineært eller ulineært, og det kan være tids-invariant eller tids-variant. Systemet sies å være **kausalt** hvis fremtidige inngangssignal ikke påvirker utgangen, dvs.

$$y(t) = \psi(u_{(-\infty, t]}) \quad (9.48)$$

hvor $u_{(-\infty, t]}$ betegner $u(\tau)$ i intervallet $\tau \in (-\infty, t]$ og ψ er en funksjon.

Det alment akseptert at et fysisk system alltid er kausalt.

Eksempel 9.6 Et lineært tids-invariant system beskrives av

$$y(s) = h(s)u(s) \quad (9.49)$$

i Laplaceplanet. Da er målingen

$$y(t) = \int_{-\infty}^t h(\tau)u(t-\tau)d\tau \quad (9.50)$$

hvor systemets impulsrespons er $h(t) = \mathcal{L}^{-1}[h(s)]$. Det er derfor klart av lign. (9.50) at systemet er kausalt hvis og bare hvis

$$h(t) = 0 \quad \text{for alle } t < 0 \quad (9.51)$$

■

Eksempel 9.7 Et eksempel på et ikke-kausalt system som er et ideelt lavpassfilter gitt av

$$|h(j\omega)| = \begin{cases} 1 & \text{for } |\omega| < \omega_0 \\ 0 & \text{for } |\omega| > \omega_0 \end{cases} \quad (9.52)$$

og

$$\angle h(j\omega) = 0 \quad (9.53)$$

Dette filteret har impulsrespons

$$h(t) = \frac{\omega_0}{\pi} \frac{\sin \omega_0 t}{\omega_0 t}, \quad t \in (-\infty, \infty) \quad (9.54)$$

Figur 9.7: Impulsrespons $h(t)$ og frekvensrespons $h(j\omega)$ for ideelt lavpassfilter med $\omega_0 = 1$.

som vist i fig. 9.7. Legg merke til at impulsresponsen ikke er null for alle $t < 0$. Denne type filter lar seg ikke realisere ved bruk av fysiske komponenter siden filteret gir respons på fremtidige inngangssignaler.

Dette betyr imidlertid ikke at det ikke fins systemer hvor man kan realisere denne type filter. Hvis inngangssignalet f.eks. er innspilt på en CD-plate eller er lagret som en tidsserie på en datafil, er inngangssignalet kjent for all fremtid og et ikke-kausalt filter kan realiseres digitalt. ■

9.2.2 Tidsforskyvning i et lineært system

Et system er beskrevet med en transferfunksjon $h(s)$. Systemets frekvensrespons kan beskrives ved amplitude og fase. En alternativ beskrivelse er amplitude og **tidsforskyvning**:

Gitt et system med transferfunksjon $h(s)$ med inngangssignal u og utgangssignal y slik at $y(s) = h(s)u(s)$. Anta at inngangssignalet er gitt ved $u(t) = \sin \omega t$, $\omega \neq 0$. Da er det stasjonære utgangssignalet

$$y(t) = |h(j\omega)| \sin[\omega(t - \tau)]$$

hvor tidsforskyvningen τ er gitt av

$$\tau = -\frac{\angle h(j\omega)}{\omega} \quad (9.55)$$

Dette følger fra frekvensanalysen siden stasjonær måling er

$$y(t) = |h(j\omega)| \sin[\omega t + \angle h(j\omega)]$$

Sammenhengen mellom fasen og tidsforskyvningen er derfor gitt av $\angle h(j\omega) = -\omega\tau$.

Kommentar 9.1 Vær oppmerksom på forskjellen mellom tidsforskyvning og tidsforsinkelse. En tidsforsinkelse er et ikke-minimum-fase fenomen som skyldes dødtid i prosessen, mens en tidsforskyvning, som er frekvensavhengig, er tidsforskyvning mellom inngang og utgang som følge av transferfunksjonens fase. Dette fenomenet opptrer i systemer både med minimum fase og ikke-minimum-fase. ■

Frekvensresponsen kan altså beskrives på to måter:

1. Med amplitude $|h(j\omega)|$ og fase $\angle h(j\omega)$.
2. Med amplitude $|h(j\omega)|$ og tidsforskyvningen $\tau(\omega) = -\angle h(j\omega)/\omega$.

I mange anvendelser ønskes en mest mulig konstant tidsforskyvning opp til båndbredden, og i så fall er tidsforskyvningen en viktigere parameter enn fasen. Konstant tidsforskyvning oppnås med lineær fasegang, dvs. for $\angle h(j\omega) \propto \omega$.

Eksempel 9.8 Ved sprøytelakkering av biler ved bruk av en robot er robotens bevegelse programmert inn på forhånd i form av en posisjonsreferanse $y_0(t)$ for hele tidsintervallet. Lakkeringen foregår ved at roboten følger referansen ved tilbakekobling. For å oppnå et godt resultat er det viktig at referansen følges nøyaktig. Det har ingen betydning om robotens bane beskrevet ved målingen $y(t)$ er tidsforsinket så lenge tidsforskyvningen $\tau(\omega)$ er den samme for alle motorene og for alle frekvenser opp til kryssfrekvensen slik at $\tau(\omega) = \tau$. I så fall resulterer en referanse $y_0(t)$ i en måling $y(t - \tau)$ som er lik referansen forsinket med τ .

Tidsforskyvningen τ kan finnes ved å ta opp frekvensresponsen til systemet. I et industrielt styresystem kan derfor nøyaktig følging oppnås ved å fremskynde referansen med τ slik at målingen blir korrekt og stemmer med tidspunkt for lakkstrøm på og av. ■

Eksempel 9.9 Begrepet tidsforskyvning (*time shift*) er velkjent innen lineær filterteori, hvor det brukes i forbindelse med at filtere med lineær fasegang har en konstant tidsforskyvning (se f.eks. [29]). Av de klassiske filtre er Butterworth-filteret optimalisert med hensyn på maksimum flat amplitude i passbåndet, mens Bessel-filteret er optimalisert for å gi konstant tidsforskyvning i passbåndet som oppnås med en lineær fasegang. ■

9.2.3 Tidsforskyvning for førsteordens system

Gitt prosessen

$$y(s) = \frac{1}{s}u(s) \tag{9.56}$$

som er en ren integrasjon. Dette kan være transferfunksjonen til en hastighetsstyrt motor eller en tilnærmet transferfunksjon for en ventilstyrt hydraulisk motor (se kapittel 3.3.3).

Anta at regulatoren

$$u(t) = K_v e(t) \quad (9.57)$$

benyttes hvor $e(t) = y_0(t) - y(t)$ er reguleringsavviket.

Systemet er da type 1 med hastighetskonstant K_v . En rampe $y_0(t) = v_0 t$ i referansen gir da et stasjonært avvik

$$e_s(t) = v_0 / K_v \quad (9.58)$$

En annen betraktningssmåte er at systemet får en forskyvning i tid

$$T = \frac{e_s}{v_0} = \frac{1}{K_v} \quad (9.59)$$

som rett og slett er den inverse av hastighetskonstanten. Tidsforskyvningen er altså konstant og uavhengig av hastigheten.

Dette gjaldt en rampe, og det er interessant å undersøke om det samme gjelder for en hvilken som helst referanse. Målingen er gitt av

$$y(s) = M(s)y_0(s) \quad (9.60)$$

hvor

$$M(s) = \frac{1}{1 + Ts} \quad (9.61)$$

er følgeforholdet og T er tidsforskyvningen for en rampe som gitt i lign. (9.59).

Anta at referansen er en ren sinus:

$$y_0(t) = Y_0 \sin \omega t \quad (9.62)$$

Målingen blir

$$y(t) = Y_0 \sin(\omega t + \phi) \quad (9.63)$$

hvor faseforskyvningen er

$$\phi = -\arctan(\omega T) \quad (9.64)$$

Ved en enkel omskrivning fås

$$y(t) = Y_0 \sin \omega \left(t - \frac{\arctan \omega T}{\omega} \right) \quad (9.65)$$

Ettersom

$$\arctan \omega T \approx \omega T \quad \text{for } \omega T < 1 \quad (9.66)$$

(se figur 9.8) fås

$$y(t) \approx Y_0 \sin \omega(t - T) \quad \text{for } \omega T < 1 \quad (9.67)$$

Kryssfrekvensen for systemet er $\omega_c = K_v = 1/T$. Dette betyr at for alle frekvenser opp til båndbredden er målingen tilnærmet lik referansen forsinket med $T = 1/K_v$.

Figur 9.8: *Fasegang* $\arctan\omega T$ for førsteordens system (heltrukken kurve) og lineær fasegang ωT (stiplet kurve)

Eksempel 9.10 En ventilstyrt hydraulisk servomekanisme med proporsjonalregulator har sløyfetransferfunksjonen

$$h_0(s) = \frac{\theta_m}{u}(s) = \frac{K_v}{s(1 + 2\zeta_h \frac{s}{\omega_h} + \frac{s^2}{\omega_h^2})} \quad (9.68)$$

hvor θ_m er motorvinkelen og u er ventilpådraget. Forsterkningen er $K_v = K_h K_p$ hvor K_h er prosessens forsterkning og K_p er regulatorens forsterkning. Den relative dempingen antas å være $\zeta_h = 0.25$.

Ved ω_{180} er forsterkningen

$$|h(j\omega_{180})| = \frac{K_v}{2\zeta_h\omega_h} = 2\frac{K_v}{\omega_h} \quad (9.69)$$

hvilket medfører at $K_v = 0.25\omega_h$ gir en forsterkningsmargin på 6 dB. Kryssfrequensen blir da

$$\omega_c \approx K_v = 0.25\omega_h \quad (9.70)$$

Siden den hydrauliske udempede resonansfrekvensen ω_h er større enn kryssfrequensen, kan $h_0(s)$ tilnærmes med

$$h_0(s) = \frac{K_v}{s} \quad (9.71)$$

for frekvenser opp til kryssfrequensen ω_c . Dette betyr at ved følging av en referanse $\theta_0(t)$ som inneholder frekvenskomponenter opp til kryssfrequensen ω_c , vil målingen $\theta_m(t)$

være tilnærmet lik referansen forsinket med $T = 1/K_v$:

$$\theta_m(t) \approx \theta_0(t - \frac{1}{K_v}) \quad (9.72)$$

■

9.2.4 Tidsforskyvning for andreordens system

Gitt den andreordens prosessen

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (9.73)$$

$$\dot{x}_2 = u \quad (9.74)$$

med målingen

$$y = x_1 \quad (9.75)$$

Tilbakekoblingen er

$$u(t) = K_1(y_0(t) - y(t)) - K_2x_2(t) \quad (9.76)$$

hvor $y_0(t)$ er referansen. Følgeforholdet er

$$M(s) = \frac{y}{y_0}(s) = \frac{1}{1 + 2\zeta\frac{s}{\omega_b} + \frac{s^2}{\omega_b^2}} \quad (9.77)$$

hvor $K_1 = \omega_b^2$ og $K_2 = 2\zeta\omega_b$. ω_b er tilnærmet lik kryssfrekvensen ω_c , og kan sies å være båndbredden til systemet.

Anta først at systemet er kritisk dempet, hvilket er tilfelle for $\zeta = 1$. Da er

$$M(s) = \frac{1}{(1 + \frac{s}{\omega_b})^2} \quad (9.78)$$

og i analogi med utledningen i kapittel 9.2.3 blir responsen til en referanse $y_0(t) = Y_0 \sin \omega t$ lik

$$y(t) = Y_0 \sin(\omega t + \phi) \quad (9.79)$$

hvor faseforskyvningen er

$$\phi = -2\arctan\left(\frac{\omega}{\omega_b}\right) \approx -2\frac{\omega}{\omega_b} \quad \text{for } \omega < \omega_b \quad (9.80)$$

Målingen kan derfor tilnærmes med

$$y(t) = Y_0 \sin\left[\omega\left(t - \frac{2}{\omega_b}\right)\right] \quad \text{for } \omega < \omega_b \quad (9.81)$$

hvilket betyr at målingen er tilnærmet lik referansen forskyvnet med $T = 2/\omega_b$.

Hvis systemet er underdempet, dvs. $\zeta < 1$, har $M(s)$ komplekse poler, og responsen på en referanse $y_0(t) = Y_0 \sin \omega t$ blir

$$y(t) = Y_0 \sin(\omega t + \phi) \quad (9.82)$$

hvor faseforskyvningen er

$$\phi = -\arctan \frac{2\zeta \frac{\omega}{\omega_0}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_b}\right)^2} \quad (9.83)$$

Dette kan tilnærmes med

$$\phi \approx 2\zeta \frac{\omega}{\omega_b} \quad \text{for } \omega < \omega_b \quad (9.84)$$

som betyr at i dette tilfellet er målingen tilnærmet lik referansen forsinket med

$$T = \frac{2\zeta}{\omega_b} \quad (9.85)$$

En sammenligning mellom fasegangen for et andreordens system og ideell lineær fasegang er vist i figur 9.9.

Figur 9.9: Sammenligning mellom ideell lineær fasegang (stiplet linje) og fasegang for andreordens system med $\zeta = 0.866$ (heltrukken linje).

En mest mulig lineær fasegang som gir tilnærmet konstant tidsforskyvning, fås ved å velge polene til den andreordens prosessen lik polene til et andreordens Bessel-filter (se kapittel 10.8.2). Dette oppnås med $\zeta = \frac{1}{2}\sqrt{3} = 0.866$.

9.2.5 Følging av preprogrammert referanse med foroverkobling

Gitt følgende problem: En referanse $y_0(t)$ skal følges i intervallet $t \in [t_0, t_s]$. Referansen $y_0(t)$ er kjent og lagret for hele tidsintervallet. Følgesystemet skal ha null stasjonært avvik ved følging av en rampe i $y_0(t)$.

Anta at følgesystemet består av en motor med hastighetsregulator som driver en last som består av et treghetsmoment. Pådraget $u(t)$ til systemet er hastighetsreferansen.

$$y(s) = \frac{1}{s}u(s) \quad (9.86)$$

hvor pådraget er

$$u(t) = K_v(y_0(t) - y(t)) \quad (9.87)$$

Ved følgende av en rampe $y_0(t) = v_0t$ oppstår reguleringsavviket

$$e(t) = y_0(t) - y(t) = \frac{v_0}{K_v} \quad (9.88)$$

Dette avviket kan elimineres ved å benytte foroverkobling fra hastighetsreferansen:

$$u(t) = K_v(y_0(t) - y(t)) + v_0 \quad (9.89)$$

Dette vil ut fra modellen (9.86) gi perfekt følgende av en referanse bestående av ramper. Modellen (9.86) forutsetter at hastighetssløyfen er perfekt, men det er klart at det ikke er mulig å oppnå uendelig akselerasjon i systemet. Sprang i $u(t)$ kan derfor ikke følges uten transiente avvik.

Systemet vil derfor få betydelige oversving ved sprang i hastighetsreferansen v_0 .

9.2.6 Følging av preprogrammert referanse ved tidsforskyvning av referanse

En annen løsning på problemet i kapittel 9.2.5 er å forskyve referansen i tid. For systemet gitt av lign. (9.86,9.87) ble det vist i kapittel 9.2.3 at målingen kan tilnærmes med

$$y(t) \approx y_0(t - T) \quad (9.90)$$

med $T = 1/K_v$ når referansen inneholder frekvenskomponenter opp til $\omega = 1/T$.

Hvis pådraget

$$u(t) = K_v(y_0(t + T) - y(t)) \quad (9.91)$$

brukes vil systemet følge ramper med null stasjonært avvik. I tillegg vil systemet ha god ytelse ved følgende av alle typer referanser. Eksempelvis vil systemet ha god ytelse ved følgende av referanser med stykkevis konstant hastighet. Løsningen med hastighetsforoverkobling som presentert i kapittel 9.2.5, gir større avvik ved sprang i hastigheten.

9.2.7 Servosystem med flere motorer

I en tegnemaskin skal pennen styres i x og y -retning. En likestrømsmotor brukes for å styre posisjonen i hver retning. Motorene har lik transferfunksjon

$$\frac{x}{u_x}(s) = \frac{1}{s(1 + 0.01s)(1 + 0.001s)} \quad (9.92)$$

og

$$\frac{y}{u_y}(s) = \frac{1}{s(1 + 0.01s)(1 + 0.001s)} \quad (9.93)$$

Samme regulator benyttes i begge retninger:

$$u_x(t) = 100(x_0(t) - x(t)) \quad (9.94)$$

$$u_y(t) = 100(y_0(t) - y(t)) \quad (9.95)$$

Et rektangel skal tegnes, og pennen skal ha konstant hastighet. Referansen i x og y -retning blir en sammensetning av ramper med sprang i hastighetsreferansen.

Med proporsjonalregulering fås stasjonært avvik ved følgende av rampene. I xy -planet følger imidlertid pennen meget nøyaktig, riktignok med en tidsforskyvning på 0.01 s, men det har ingen betydning i denne anvendelsen.

Det er viktig at de to motorene har samme dynamikk i lukket sløyfe. Hvis forsterkingen er ulik, f.eks. hvis

$$u_y(t) = 200(y_0(t) - y(t)) \quad (9.96)$$

brukes i y -retning, blir tidsforskyvningen ulik i de to retningene, og avvik oppstår i xy -planet.

Med hastighetsforoverkobling

$$u_x(t) = 100(x_0(t) - x(t)) + \dot{x}_0(t) \quad (9.97)$$

$$u_y(t) = 100(y_0(t) - y(t)) + \dot{y}_0(t) \quad (9.98)$$

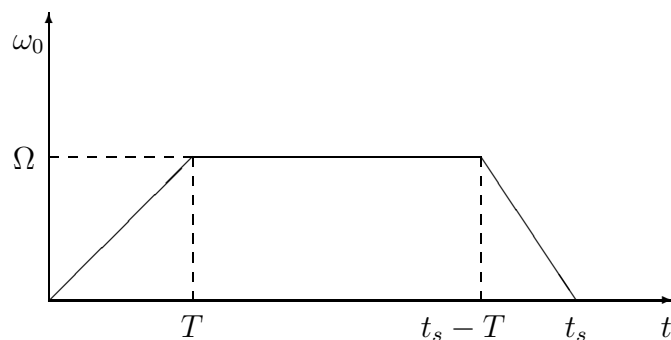
elimineres stasjonært avvik ved følgende av en rampe, men avvik oppstår ved overgangen fra en rampe til en annen. I xy -planet blir resultatet dårligere enn uten foroverkobling.

9.3 Referansegenerering

9.3.1 Innledning

I motorstyring skal ofte motoren utføre en bevegelse fra et punkt til et annet. Dette er eksempelvis tilfelle for en motor som styrer et lesehode i en diskettstasjon, eller for en motor i en robotarm som brukes til punktsveising. I tillegg kan det være spesifikasjoner på hvordan bevegelsen mellom punktene skal være. En mye brukt spesifisering er at bevegelsen skal skje med minimum tidsforbruk, som vil være tilfelle både for posisjonering av et lesehode i en diskettstasjon og ved punktsveising ved bruk av roboter. Alternativt kan det være spesifisert at akselerasjonen skal være liten og kontinuerlig. Dette er tilfelle ved styring av en robot i verdensrommet hvor man må unngå store reaksjonskrefter. Ved punkt-til-punkt styring er det ikke hensiktsmessig å endre posisjonsreferansen i sprang fra startpunktet til endepunktet. For store sprang vil da motoren gå i metning i første del av bevegelsen, mens den vil svinge seg inn til sluttposisjonen med det regulerte systems dynamikk. Denne løsningen har ikke minimum tidsforløp, og den har heller ikke kontinuerlig akselerasjon.

En bedre løsning er det å generere en referanse i posisjon, hastighet og akselerasjon mellom de to punktene slik at de gitte spesifikasjoner oppfylles. Referansen genereres vanligvis som et polynom i tiden t , eller ved å skjøte sammen polynomer.



Figur 9.10: Hastighetsprofil med stykkevis konstant akselerasjon

9.3.2 Stykkevis konstant akselerasjon

En mye brukt referanse for punkt-til-punkt bevegelse har en akselerasjonsprofil som er stykkevis konstant (fig. 9.10):

$$\dot{\omega}_0(t) = \begin{cases} A & 0 < t < T \\ 0 & T < t < t_s - T \\ -A & t_s - T < t < t_s \end{cases} \quad (9.99)$$

hvor t_s er slutt-tiden. Hastighetsprofilen blir:

$$\omega_0(t) = \begin{cases} At & 0 < t < T \\ AT & T < t < t_s - T \\ A(t_s - t) & t_s - T < t < t_s \end{cases} \quad (9.100)$$

og posisjonsreferansen:

$$\theta_0(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}At^2 & 0 < t < T \\ \frac{1}{2}AT^2 + AT(t - T) & T < t < t_s - T \\ \frac{1}{2}AT^2 + AT(t - T) - \frac{1}{2}A(t - t_s + T)^2 & t_s - T < t < t_s \end{cases} \quad (9.101)$$

Det antas at startposisjon Θ_0 og sluttposisjon Θ_s er gitt. I tillegg må enten cruisehastighet Ω eller akselerasjonen A spesifiseres.

På grunn av symmetrien er

$$y_0\left(\frac{t_s}{2}\right) = \frac{\Theta_s - \Theta_0}{2} \quad (9.102)$$

Av lign. (9.101) og fås ligningen

$$\frac{1}{2}AT^2 + AT\left(\frac{t_s}{2} - T\right) = \frac{\Theta_s - \Theta_0}{2} \quad (9.103)$$

som ved innsetting av $AT = \Omega$ forenkles til

$$-\frac{1}{2}\Omega T + \Omega \frac{t_s}{2} = \frac{\Theta_s - \Theta_0}{2} \quad (9.104)$$

1. Hvis cruisehastigheten Ω og slutt-tiden t_s er gitt, så er omkoblingstiden

$$T = \begin{cases} \frac{\Theta_0 - \Theta_s + \Omega t_s}{\Omega} & \Omega < 2 \frac{\Theta_s - \Theta_0}{t_s} \\ \frac{t_s}{2} & \Omega \geq 2 \frac{\Theta_s - \Theta_0}{t_s} \end{cases} \quad (9.105)$$

og akselerasjonen er $A = \Omega/T$.

2. Hvis slutt-tiden t_s og omkoblingstiden $T < t_s/2$ er gitt, så er cruisehastigheten

$$\Omega = \frac{\Theta_s - \Theta_0}{t_s - T} \quad (9.106)$$

og akselerasjonen er $A = \Omega/T$.

3. Hvis cruisehastigheten Ω og akselerasjonen A er gitt, er omkoblingstiden gitt av

$$T = \begin{cases} \frac{\Omega}{A} & \Omega < \sqrt{A(\Theta_s - \Theta_0)} \\ \sqrt{\frac{\Theta_s - \Theta_0}{A}} & \Omega \geq \sqrt{A(\Theta_s - \Theta_0)} \end{cases} \quad (9.107)$$

og slutt-tiden er gitt av

$$t_s = \begin{cases} \frac{\Theta_s - \Theta_0 + \Omega T}{\Omega} & \Omega < \sqrt{A(\Theta_s - \Theta_0)} \\ 2T & \Omega \geq \sqrt{A(\Theta_s - \Theta_0)} \end{cases} \quad (9.108)$$

Hvis A er systemets maksimale akselerasjon og Ω er maksimal hastighet, så er dette referansen med minimum tidsforbruk.

Legg merke til at referansen over intervallet er gitt som tidsfunksjoner for akselerasjon, hastighet og posisjon, og ideell foroverkobling som presentert i kapittel 9.1.1 kan derfor brukes for en strømstyrt likestrømsmotor.

9.3.3 Optimalisering av hastighetsprofil

Anta at posisjonsinkrementet Θ og forflytningstiden t_s er gitt ved punkt-til-punkt bevegelse. Motor og last modelleres med

$$J\dot{\omega}_m = K_T i_a - T_L \quad (9.109)$$

hvor J er treghetsmomentet for motor og last, K_T er momentkonstanten og i_a er ankerstrømmen. T_L er tørr friksjon som har konstant størrelse og virker mot bevegelsesretningen.

Hastighetsprofilen skal optimaliseres med hensyn på minimum energitap (og følgelig minimum varmeutvikling) i ankerkretsen. Optimaliseringsproblemet er:

$$\min_{\omega_m(t), t \in [0, t_s]} R_a \int_0^{t_s} i_a^2(t) dt \quad (9.110)$$

hvor

$$\int_0^{t_s} \omega_m(t) dt = \Theta \quad (9.111)$$

Dette problemet er presentert og løst i [32].

Tørrfriksjonen gir et konstant energitap

$$\frac{R}{K_T} T_L^2 t_s \quad (9.112)$$

uavhengig av hastighetsprofilen.

Parabolsk hastighetspotensial

Den optimale hastighetsprofilen er gitt av et andreordens polynom:

$$\omega_0(t) = \frac{6(t_s - t)t}{t_s^3} \Theta \quad (9.113)$$

som gir en topphastighet $\omega_0(t_s/2) = 3\Theta/(2t_s)$. Profilen er vist for $t_s = 1$ og $\Theta = 1$ i figur 9.11. Resulterende energitap er

$$W_o = \frac{R}{K_T^2} \left(12 \frac{J^2 \Theta^2}{t_s^3} + T_L^2 t_s \right) \quad (9.114)$$

Figur 9.11: *Parabolsk hastighetsprofil for en forflytning lik 1 og for et tidsintervall lik 1.*

Stykkevis konstant akselerasjon

En hastighetsprofil med stykkevis konstant akselerasjon og omkoblingstid gitt av $T = t_s/3$ viser seg å gi et energitap som er svært nær det optimale resultatet for den parabolske profilen. Denne hastighetsprofilen har konstant akselerasjon i $t_s/3$, konstant hastighet i $t_s/3$ og konstant negativ akselerasjon i $t_s/3$. Topphastigheten er $\omega_0 = 3\Theta/(2t_s)$ som for den parabolske hastighetsprofilen. Det resulterende energitapet er

$$W = \frac{R}{K_T^2} \left(13.5 \frac{J^2 \Theta^2}{t_s^3} + T_L^2 t_s \right) \quad (9.115)$$

Hvis man ser bort fra det konstante leddet som skyldes tørr friksjon, så er dette bare 12.5% mer enn for den optimale profilen. Stykkevis konstant akselerasjon med $T = t_s/3$ er enklere å bruke, og derfor er dette en mye brukt hastighetsprofil i punkt-til-punkt bevegelse. Hastighetsprofilen er vist i figur 9.12 for samme forflytning som i figur 9.11.

Figur 9.12: *Stykkevis konstant hastighet med tre like lange tidsintervaller for akselerasjon, konstant hastighet og retardasjon.*

9.3.4 Filtrering av referansen

Store sprang kan forekomme i referansen til et servosystem, og dette kan føre til at pådraget ut fra regulatoren blir svært stort. Dette kan gi problemer:

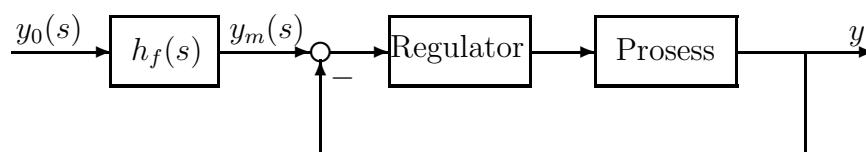
1. Et stort pådrag vil resultere i metning. Hvis integralvirkning benyttes i regulatoren, kan dette gi oscillasjoner og i visse tilfeller ustabilitet.
2. Kraftige akselerasjoner vil oppstå, og dette kan gi slitasje på mekaniske komponenter.
3. For fartøyer vil ikke kraftige rykk i bevegelsen være akseptabelt.
4. Regulatorprogrammene eller elektronikken i grensesnittene kan gi nødstopp på grunn av for store verdier.

Det er mulig å redusere pådragsbruken og få en mykere bevegelse ved å skru ned forsterkningen og dermed båndbredden i tilbakekoblingene. Dette er ingen god løsning siden systemet blir mer følsomt for forstyrrelser, tørr friksjon og unøyaktigheter i aktuatorene når forsterkningen reduseres.

En enkel og god løsning er å filtrere referansesignalet (figur 9.13). En motor kan ikke under noen omstendighet følge et sprang i hastighet eller posisjon uten avvik, og bruk av et passende filter gir tilnærmet samme innsvingningstid med en bedre pådragsbruk.

Anta at et motorsystem har følgeforholdet

$$M(s) = \frac{\theta}{\theta_0} = \frac{1}{1 + 2\zeta\frac{s}{\omega_0} + \frac{s^2}{\omega_0^2}} \quad (9.116)$$

Figur 9.13: *Filtrering av referansen*

og at referansen θ_0 inneholder sprang. Det er da gunstig å filtrere referansen med et andreordens filter

$$y_m(s) = h_f(s)y_0(s) = \frac{1}{1 + 2\zeta_f \frac{s}{\omega_f} + \frac{s^2}{\omega_f^2}} y_0(s) \quad (9.117)$$

hvor $\zeta_f \approx 1$ og $\omega_f \approx \omega_0$. Dette filteret realiseres av modellen

$$\dot{y}_m = v_m \quad (9.118)$$

$$\dot{v}_m = -\omega_f^2 y_m - 2\zeta_f \omega_f v_m + \omega_f^2 y_0 \quad (9.119)$$

Den filtrerte referansen y_m brukes som referanse for det tilbakekoblede systemet. Legg merke til at den tilhørende filtrerte hastighetsreferansen v_m også er tilgjengelig for bruk i en foroverkobling, som gir bedre nøyaktighet i følgingen av y_m .

9.4 MATLAB-eksempel

Impulsrespons og frekvensrespons for det ideelle lavpassfilteret i fig. 9.7 er generert med følgende script-fil i MATLAB:

```

xm = 6*pi; ymin = -0.5; ymax = 1.5;
x = (-xm:0.1:xm);

y = (1/pi)*sin(x)./x;

clg;
axis([-xm xm -0.2 0.5])
subplot(211);
plot(x,y,'-',[ -xm xm],[0 0],'-',[0 0],[ymin ymax],'-')
xlabel('t')

axis([-2 2 0 ymax]);
plot([-1 1],[1 1],'-',[-1 -1],[0 1],'-',[1 1],[0 1],'-',...
[0 0],[0 ymax],'-'),xlabel('w')
```

Kapittel 10

Implementeringsaspekter

10.1 Spesifikasjoner

Ved utvikling av en tilbakekobling for et servosystem må de spesifiserte krav til systemets ytelse oppfylles. Disse spesifikasjonene kan være krav til

1. båndbredde
2. følsomhet for forstyrrelser
3. nøyaktighet eller tillatt avvik
4. stabilitetsmarginer

I mange tilfeller er imidlertid spesifikasjonen at systemet skal være best mulig, og det er da opp til designeren å utvikle detaljerte spesifikasjoner.

Båndbredden er vanligvis spesifisert ved kryssfrekvensen, eller ved tidskonstanten for det lukkede system ved sprang på referansen. I de aller fleste tilfeller er det gunstig å ha en høyest mulig båndbredde som samtidig gir tilstrekkelig fase- og forsterkningsmargin. Dette gir mulighet for høyere forsterkning for frekvenser under kryssfrekvensen og dermed bedre nøyaktighet. Videre følger systemet referansen opp til båndbredden. Følgende faktorer begrenser båndbredden:

- Støy med frekvens omkring kryssfrekvensen gir vanligvis dårlig ytelse, og kryssfrekvensen bør ofte reduseres for å unngå en signifikant støypåvirkning.
- Effektbegrensninger (se [3]).
- Krav til robusthet som tilsier at stabilitetsmarginene ikke må være for følsomme for parametervariasjoner.

Ut fra dette kan det argumenteres med at båndbredden bør velges så liten som mulig uten at spesifikasjonene brytes, men som allerede nevnt vil spesifikasjonene i de fleste tilfeller kreve en høy båndbredde, og den valgte båndbredden blir et kompromiss mellom krav til høy båndbredde for nøyaktighet og god respons og dessuten krav til lav båndbredde for robusthet og redusert følsomhet for høyfrekvent støy.

Krav til nøyaktighet er en viktig spesifikasjon i servosystemer. Avvik kan skyldes at posisjons-, hastighets- eller akselerasjonsreferansen er forskjellig fra null, eller det kan skyldes forstyrrelser som friksjon eller påvirkning fra lasten. Nøyaktigheten spesifiseres

3. Krav til følging med spesifisert nøyaktighet av referanse med konstant posisjon, hastighet eller akselerasjon avgjør om systemet skal være av type 0, 1 eller 2.¹
4. Det må være en helning på -1 i et område på omkring en dekadet omkring kryssfrekvensen. Grunnen til dette er ganske enkelt at med helning 0 vil ikke kurven krysse 0 dB-linjen, mens med -2 eller brattere er ikke fasemarginen stor nok². Videre må eventuelle variasjoner i kryssfrekvensen pga. ulineariteter eller parametervariasjoner ikke være så store at kryssfrekvensen kommer ut av området med helning -1 .
5. Høyfrekvent støy og umodellert dynamikk fra f.eks. mekaniske resonanser begrenser båndbredden, og en bratt helning er ønskelig for frekvenser over kryssfrekvensen. Dette reduserer innvirkningen av disse høyfrekvente forstyrrelsene.
6. En brattere helning enn -2 for frekvenser under kryssfrekvensen bør vanligvis unngås siden dette gir et betinget stabilt system.

For systemer som er ustabile i åpen sløyfe eller som er ikke-minimum-fase gjelder andre betingelser.

Eksempel 10.1 En prosess har transferfunksjonen

$$h(s) = \frac{1}{1 + 2\zeta\frac{s}{\omega_0} + \frac{s^2}{\omega_0^2}} \quad (10.1)$$

hvor relativ demping er $\zeta = 0.5$ og $\omega_0 = 1$ rad/s. Frekvensen ω_0 kan variere mellom 0.5 rad/s og 2 rad/s.

Systemet skal ha en forsterkning på 100 (= 40 dB) ved lave frekvenser, det skal ha en fasemargin $\psi \geq 45^\circ$, og det skal være av type 0.

Det er to mulige regulatorer som tilfredsstillers denne spesifikasjonen. Enten må kryssfrekvensen velges lavere enn ω_0 , og en begrenset I-regulator benyttes. Alternativt må kryssfrekvensen være minst en dekadet over ω_0 og en PD-regulator benyttes for å oppnå fasemargin.

En begrenset I-regulator er

$$h_1(s) = 100 \frac{1}{1 + 100T_i s} \quad (10.2)$$

hvor

$$\omega_c = \frac{1}{T_i} < \frac{\omega_0}{10} \quad (10.3)$$

er kryssfrekvensen. Fasemarginen er omkring 90° .

PD-regulatoren er

$$h_2(s) = 100 \frac{1 + T_d s}{1 + 0.1T_d s} \quad (10.4)$$

¹Et system av type 0 har ingen åpne integratorer, et system av type 1 har én åpen integrator, mens et system av type to har to åpne integratorer. Dette er inngående beskrevet i kapittel 10.2.

²Hvis helningen er -2 bare i et meget kort intervall og -1 omkring, kan fasemarginen være tilstrekkelig også med en helning på -2 ved kryssfrekvensen.

hvor

$$\frac{1}{T_d} = 5.6\omega_0 \quad (10.5)$$

gir en kryssfrekvens $\omega_c = 17.8$ rad/s, og en fasemargin på 51.8° . Denne regulatoren er imidlertid ikke robust med hensyn på variasjoner i ω_0 , siden en dobling av ω_0 resulterer i for liten fasemargin. ■

Eksempel 10.2 En prosess har transferfunksjonen

$$h(s) = \frac{1}{(1 + 2\zeta\frac{s}{\omega_0} + \frac{s^2}{\omega_0^2})(1 + \frac{s}{5\omega_0})} \quad (10.6)$$

hvor relativ demping er $\zeta = 0.5$ og $\omega_0 = 1$ rad/s.

Systemet skal ha en forsterkning på 300 eller 50 dB for $\omega < 0.01$ rad/s, og skal være av type 1.

En regulator som oppfyller denne spesifikasjonen er

$$h_r(s) = 100 \frac{1 + 10s}{1 + 100s} \frac{\omega_c}{s} \quad (10.7)$$

med $\omega_c = 0.03$ rad/s, som er en I-regulator som i tillegg har begrenset integralvirkning.

Legg merke til at i dette tilfelle ligger alle prosessens knekkfrekvenser over kryssfrekvensen til det lukkede system.

For denne prosessen er det svært vanskelig å få et godt system ved å bruke derivatvirkning og $\omega_c > \omega_0$, siden avstanden til neste knekkfrekvens ved $5\omega_0$ er så liten at det ikke blir plass til et intervall med helning på -1 . ■

Eksempel 10.3 En prosess har transferfunksjonen

$$h(s) = \frac{1}{s(1 + \frac{s}{10})} \quad (10.8)$$

Systemet skal ha en hastighetskonstant på 100.

Regulatoren

$$h_1(s) = 100 \frac{1 + \frac{s}{10}}{1 + \frac{s}{100}} \quad (10.9)$$

gir sløyfetransferfunksjonen

$$h_0(s) = \frac{100}{s} \frac{1}{1 + \frac{s}{100}} \quad (10.10)$$

som betyr at systemet har en hastighetskonstant $K_v = 100$. Kryssfrekvensen er

$$\omega_c = K_v = 100 \text{ rad/s} \quad (10.11)$$

Anta at kryssfrekvensen er begrenset til $\omega_c < 100$ rad/s, men at hastighetskonstanten skal være 60 dB.

Dette oppnås ved å bruke begrenset integralvirkning som i regulatoren

$$h_2(s) = 1000 \frac{1 + 0.1s}{1 + s} \frac{1 + \frac{s}{10}}{1 + \frac{s}{100}} \quad (10.12)$$

Dette gir 20 dB større forsterkning ved lave frekvenser. ■

10.2 Type system

Støyen kan komme inn på ulike steder i prosessen. Den betegnes som målestøy hvis støyen v er rent additiv til målingen y slik at

$$y(s) = h_u(s)u(s) + v(s) \quad (10.13)$$

hvor u er pådrag og $h_u(s)$ er transferfunksjonen fra pådrag til måling.

I motsatt fall kalles den prosess-støy, og y er gitt ved

$$y(s) = h_u(s)u(s) + h_v(s)v(s) \quad (10.14)$$

hvor $h_v(s)$ er transferfunksjon fra støy til måling. Målestøy er et spesialtilfelle av prosess-støy hvor $h_v(s) = 1$.

Støyens innvirkning på en regulert prosess hvor

$$u(s) = h_r(s)e(s) \quad (10.15)$$

og $e = y_0 - y$ er reguleringsavviket, er gitt av

$$y(s) = M(s)y_0(s) + h_v(s)N(s)v(s) \quad (10.16)$$

og

$$e(s) = N(s)y_0(s) - h_v(s)N(s)v(s) \quad (10.17)$$

hvor $M = h_0/(1 + h_0)$ er følgeforholdet, $N = 1/(1 + h_0)$ er avviksforholdet og $h_0 = h_r h_u$ er sløyfetransferfunksjonen. Dette utledes ved å sette inn lign. (10.15) i lign. (10.14).

Følgesystemer betegnes type 0 dersom $h_0(s)$ ikke har åpne integrasjoner, type 1 hvis $h_0(s)$ har én åpen integrasjon og type 2 hvis $h_0(s)$ har to åpne integrasjoner. Dette kan formuleres matematisk som følger: Anta at sløyfetransferfunksjonen kan skrives på formen

$$h_0(s) = \frac{K(1 + T_a s)(1 + T_b s) \dots}{s^m(1 + T_1 s)(1 + T_2 s) \dots} \quad (10.18)$$

m er her antall integrasjoner i $h_0(s)$. Systemet sies å være av type m . Avviksforholdet er da

$$N(s) = \frac{s^m(1 + T_1 s)(1 + T_2 s) \dots}{s^m(1 + T_1 s)(1 + T_2 s) \dots + K(1 + T_a s)(1 + T_b s) \dots} \quad (10.19)$$

Stasjonært avvik som følge av en referanse $y_0(t)$ blir

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sN(s)y_0(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{s^m}{s^m + K} y_0(s) \quad (10.20)$$

Det er kjent at (se f.eks. [3]):

type	$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t)$		
	Sprang $y_0(t) = p_0$	Rampe $y_0(t) = v_0 t$	Parabel $y_0(t) = \frac{1}{2} a_0 t^2$
0	$\frac{1}{1+K} p_0$	∞	∞
1	0	$\frac{1}{K} v_0$	∞
2	0	0	$\frac{1}{K} a_0$

Tabell 10.1: Stasjonært avvik for systemer av type 0, 1 og 2 ved sprang, rampe og parabel som referanse

1. Et system av type 0 følger en konstant referanse med et stasjonært avvik, mens rampe og parabel i referansen ikke kan følges med begrenset avvik.
2. Et system av type 1 følger en konstant referanse uten stasjonært avvik, en rampe med et begrenset avvik, mens en parabel ikke kan følges med begrenset avvik.
3. Et system av type 2 følger en konstant referanse og en rampe uten stasjonært avvik, mens en parabel følges med et begrenset avvik.

Disse resultatene er gitt i tabell 10.1.

Lignende resultater kan utledes for avvik som skyldes støy. Anta at støyens transferfunksjon kan skrives

$$h_v(s) = \frac{K_v(1 + T_{va}s)(1 + T_{vb}s) \dots}{s^{m_v}(1 + T_{v1}s)(1 + T_{v2}s) \dots} \quad (10.21)$$

hvor $m_v \in \{0, 1, 2, \dots\}$. Det stasjonære avviket som følge av støyen $v(t)$ blir da

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = - \lim_{s \rightarrow 0} s h_v(s) N(s) v(s) = - \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{s^{m-m_v}}{s^m + K} v(s) \quad (10.22)$$

Et følgesystem av type m er derfor av type $m - m_v$ med hensyn på støypåvirkning.

Eksempel 10.4 Et fartøy skal styres med dynamisk posisjonering. En forenklet modell i en frihetsgrad er

$$m\ddot{y} = u - F_s \quad (10.23)$$

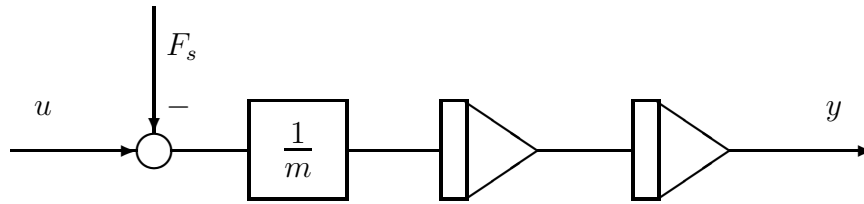
hvor y er posisjon, u er pådraget som er propellkraft, og F_s er strømkrefter. Blokkdiagrammet er vist i figur 10.2.

Laplacetransformasjon gir modellen

$$y(s) = \frac{1}{ms^2} u(s) - \frac{1}{ms^2} F_s(s) \quad (10.24)$$

En PD-regulator

$$u(s) = K_a m \frac{1 + 3s}{1 + 0.3s} (y_0(s) - y(s)) \quad (10.25)$$



Figur 10.2: Blokkdiagram som viser en enkel modell for bevegelse i en frihetsgrad ved dynamisk posisjonering

gir sløyfetransferfunksjonen

$$h_0(s) = K_a \frac{1 + 3s}{s^2(1 + 0.3s)} \quad (10.26)$$

hvor en akselerasjonskonstant $K_a = 1$ gir en kryssfrekvens $\omega_c \approx \sqrt{K_a} = 1$ rad/s.

Systemet er av type 2, og et sprang eller en rampe i referansen $y_0(t)$ gir null stasjonært avvik, mens en parabel $y(t) = \frac{1}{2}a_0t^2$, som svarer til en konstant akselerasjon i referansen, gir et stasjonært avvik

$$e_s = \frac{a_0}{K_a} \quad (10.27)$$

Systemet er imidlertid av type 0 med hensyn på forstyrrelsen $F_s(t)$, slik at en konstant $F_s(t) = F_0$ gir et avvik

$$e_s = -\frac{1}{1 + K_a} \frac{F_0}{m} \quad (10.28)$$

For å oppnå null stasjonært avvik med konstant strømpåvirkning må integralvirkning inkluderes i regulatoren:

$$u(s) = K_a m \frac{1 + 10s}{10s} \frac{1 + 3s}{1 + 0.3s} (y_0(s) - y(s)) \quad (10.29)$$

Systemet er nå et følgesystem av type 3, og systemet er av type 1 med hensyn på forstyrrelsen slik at en konstant forstyrrelse gir null stasjonært avvik. ■

10.3 Integralvirkning i servosystemer

Bruk av integralvirkning i servosystemer har to hovedhensikter:

1. Anta at det er spesifisert at et servosystem skal være av type 0, 1 eller 2. Integralvirkning kan være nødvendig for å oppnå dette.
2. Anta at det er spesifisert at et servosystem skal være av type 0, 1 eller 2 med hensyn på en støypåvirkning. Bruk av integralvirkning kan gi tilstrekkelig antall åpne integrasjoner. Dette er særlig aktuelt i systemer som er av type 0 med hensyn på forstyrrelsen (se kapittel 10.2).

Dette skal illustreres med to eksempler:

Eksempel 10.5 En motor driver en arm som er i kontakt med omgivelsene gjennom en fjær. Fjærkraften måles, og en regulator skal regulere kontaktkraften. Regulatoren implementeres med motorens posisjonsreguleringssystem i indre sløyfe.

Armens vinkel er θ , mens vinkelreferansen er θ_0 . Posisjonsregulatoren har følgeforholdet

$$M_{\theta}(s) = \frac{\theta}{\theta_0}(s) = \frac{1}{(1 + \frac{s}{\omega_1})^2} \quad (10.30)$$

hvilket vil si at posisjonssløyfen har kritisk demping.

Kraftsløyfen må ha lavere båndbredde enn posisjonssløyfen. Pådraget i denne sløyfen er θ_0 , og målingen er

$$F = K\theta \quad (10.31)$$

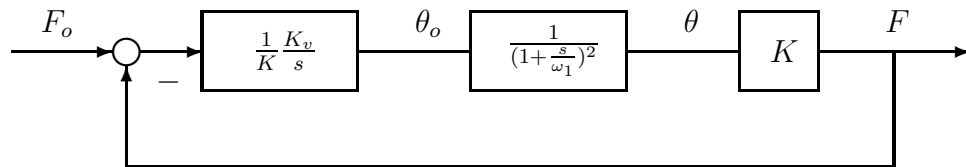
hvor F er fjærkraften og K er fjærkonstanten. Systemet er type 0. For å få sløyfeforsterkning som er større enn 1 (0 dB) for frekvenser under kryssfrekvensen bør systemet være av type 1 som oppnås ved å bruke en ren integralregulator

$$\theta_0(s) = \frac{1}{K} \frac{K_v}{s} [F_0(s) - F(s)] \quad (10.32)$$

hvor F_0 er kraftreferansen. Sløyfetransferfunksjonen i kraftsløyfen blir

$$h_0(s) = \frac{K_v}{s} M_{\theta}(s) \approx \frac{K_v}{s} \quad (10.33)$$

som gir et tilfredsstillende reguleringssystem. Systemet er vist i figur 10.3.



Figur 10.3: *Bruk av ren integralregulator for å styre andreordens kritisk dempet system av type 0*

■

Eksempel 10.6 En motor skal drive en last med konstant hastighet ω_0 . På motoren virker et ukjent men konstant lastmoment τ_0 . Modellen for motoren er

$$J_m \dot{\omega}_m(t) = K_T u(t) - T_0 \quad (10.34)$$

hvor $u(t)$ er pådraget. Reguleringsavviket betegnes

$$e(t) = \omega_0 - \omega_m(t) \quad (10.35)$$

En P-regulator

$$u(t) = K_a \frac{J_m}{K_T} e(t) \quad (10.36)$$

gir

$$\dot{e}(t) = K_a e(t) - \frac{1}{J_m} T_0 \quad (10.37)$$

Stasjonært er $\dot{e}(t) = 0$ og stasjonært avvik blir derfor

$$e_s = \frac{1}{K_a J_m} T_0 \quad (10.38)$$

Resultatet stemmer overens med at systemet er type 0 med hensyn på T_0 .

En PI-regulator (figur 10.4)

$$u(t) = K_a \frac{J_m}{K_T} [e(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t e(\tau) d\tau] \quad (10.39)$$

gir

$$\dot{e}(t) = K_a [e(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t e(\tau) d\tau] - \frac{1}{J_m} T_0 \quad (10.40)$$

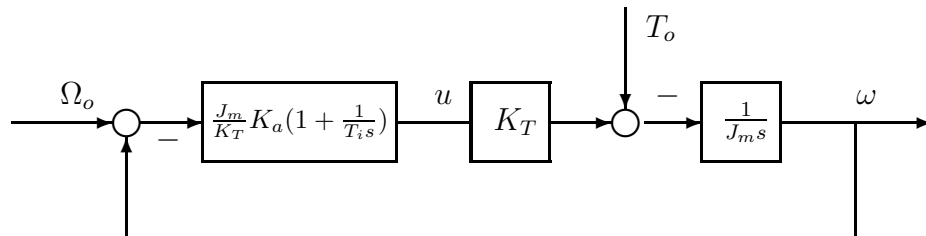
Systemet er nå type 1 med hensyn på T_0 , og stasjonært må $\dot{e}(t) = 0$ og $e(t) = 0$. Dette betyr at

$$\frac{1}{T_i} \int_0^t e(\tau) d\tau = \frac{1}{K_a J_m} T_0 \quad (10.41)$$

Integralleddet gir derfor et stasjonært bidrag

$$u_s = \frac{1}{K_T} T_0 \quad (10.42)$$

til pådraget som kompenserer for forstyrrelsen.



Figur 10.4: Hastighetssløyfe med PI-regulator for kompensering av konstant forstyrrelse

■

PID-regulatoren består av en proporsjonaldel, en derivatdel og en integraldel. Proporsjonaldelen gir pådrag proporsjonalt med reguleringsavviket, derivatdelen gir pådrag proporsjonalt med den deriverte til reguleringsavviket, mens integraldelen gir et bidrag proporsjonalt med integralet av reguleringsavviket.

Det er åpenbart at integraldelen er relativt langsom sammenlignet med P- og D-delen av regulatoren. Det viser seg at for systemer med minst én åpen integrator forverres systemets transiente egenskaper når integralvirkning brukes.

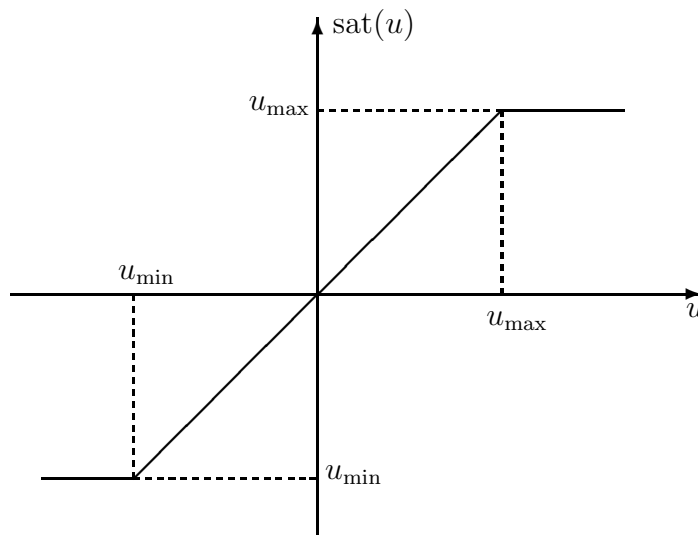
10.4 Metning og integralvirkning

Metning er et vanlig fenomen i servosystemer. Det er vanlig at motoren kan levere moment opp til et maksimalmoment, og at servosystemet dimensjoneres slik at metning kan forekomme også under vanlige driftsbetingelser. Kombinasjonen av integralvirkning og metning i prosessen kan gi store problemer og dårlig ytelse hvis ikke spesielle teknikker brukes.

Metningsfunksjonen defineres ved

$$\text{sat}(u) = \begin{cases} u_{\max} & \text{for } u \geq u_{\max} \\ u & \text{for } u_{\min} \leq u \leq u_{\max} \\ u_{\min} & \text{for } u \leq u_{\min} \end{cases} \quad (10.43)$$

og er vist i figur 10.5.



Figur 10.5: Metningsfunksjonen $\text{sat}(u)$.

Eksempel 10.7 En motor har en hastighetssløyfe med PI-regulator. Modellen er

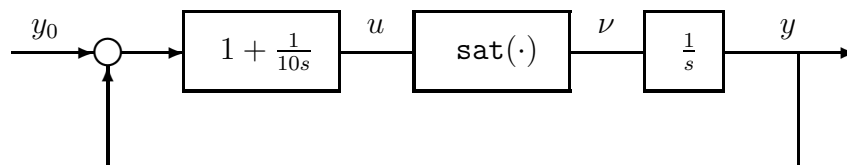
$$\dot{y} = \nu \quad (10.44)$$

$$\nu = \text{sat}(u) \quad (10.45)$$

hvor målingen y er hastigheten, og u er pådraget som er et skalert moment. Pådraget har metning $|u| \leq 1$ slik at påtrykt moment er $\text{sat}(u)$ hvor $u_{\min} = -1$ og $u_{\max} = 1$.

Regulatoren er

$$u(s) = \left(1 + \frac{1}{10s}\right)e(s) \quad (10.46)$$



Figur 10.6: Hastighetsløyfe med integralvirkning og metning.

hvor $e(t) = y_0(t) - y(t)$ er reguleringsavviket. Det resulterende systemet er vist i figur 10.6.

Anta at $y(t=0) = 0$ og at det gis et sprang i referansen slik at $y_0(t) = 10$ for $t \geq 0$.

Pådraget går umiddelbart i metning på grunn av proporsjonalleddet, og $\nu(t) = 1$ gir $\dot{y}(t) = 1$ for $t \leq 10$. Ved $t = 10$ er referansen nådd og proporsjonalleddet lik null, men integralleddet er lik

$$\frac{1}{10} \int_0^{10} (10 - t) dt = 5 \quad (10.47)$$

og systemet får en kraftig oversving siden det tar lang tid å integrere dette leddet ned til null. Det er klart at integralvirkningen resulterer i dårlig ytelse for dette systemet. ■

Det er mulig å motvirke den ugunstige effekten av integralvirkning ved metning. Her skal noen av teknikkene presenteres. Først skal imidlertid en passende notasjon defineres. En PID-regulator skrives vanligvis

$$u(s) = K_p \frac{1 + T_d s}{1 + T_f s} \frac{1 + T_i s}{T_i s} e(s) \quad (10.48)$$

som er en tilnærming av

$$u(s) = u_{PD}(s) + u_I(s) \quad (10.49)$$

hvor PD-delen er

$$u_{PD}(s) = K_p \frac{1 + T_d s}{1 + T_f s} e(s) \quad (10.50)$$

og integraldelen er

$$u_I(s) = K_p \frac{1}{T_i s} e(s) \quad (10.51)$$

Integralleddet beregnes av

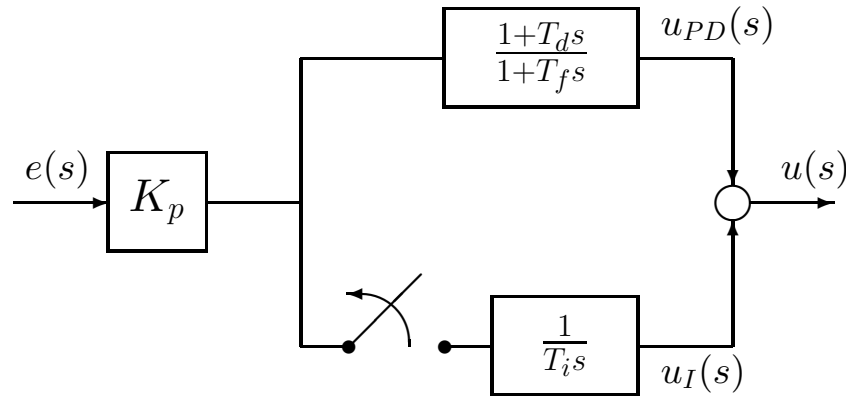
$$\dot{u}_I(t) = \frac{K_p}{T_i} e(t) \quad (10.52)$$

Beregnet pådrag betegnes u mens virkelig pådrag betegnes $\nu = \text{sat}(u)$.

Utkobling av integrator

En enkel løsning er å stoppe integrasjonen og sette $\dot{u}_I(t) = 0$ i algoritmen under passende betingelser (figur 10.7). Vanlige betingelser for å stoppe integrasjonen er

1. Stopp integrasjonen hvis pådraget er i metning: $u(t) \neq \nu(t)$.



Figur 10.7: Utkobling av integralledd i PID-regulator

2. Stopp integrasjonen hvis pådraget er i metning og integralledd og reguleringsavvik har motsatt fortegn: $u(t) \neq \nu(t)$ og $u_I(t)e(t) < 0$.
3. Stopp integrasjonen hvis integralleddet når en øvre grense: $|u_I(t)| > u_0$ hvor en typisk verdi for u_0 er metningsgrensen u_{\max} .
4. Stopp integrasjonen hvis reguleringsavviket er større enn en øvre grense: $|e(t)| > e_0$.

Metode 1 virker godt i de fleste tilfeller, men gir stort oversving hvis integralleddet får en stor verdi. Metode 2 er lik metode 1, men gir bedre innsvingning når integratoren har stor initialverdi. Metode 3 gir resultater som er sammenlignbare med metode 2. Metode 2 og 3 brukes i industrielle PID-regulatorer.

Metode 4 kan gi stasjonært avvik selv om pådraget ikke er i metning. Dette forekommer hvis $u_I(t) \approx -u_{PD}(t)$ og $|e(t)| > e_0$. Denne metoden anbefales derfor ikke.

Utladning av integrator

En mye brukt teknikk er å lade ut integratoren når pådraget går i metning. Dette implementeres ved

$$\dot{u}_I(t) = \frac{K_p}{T_i} e(t) + \frac{1}{T_t} [\nu(t) - u(t)] \quad (10.53)$$

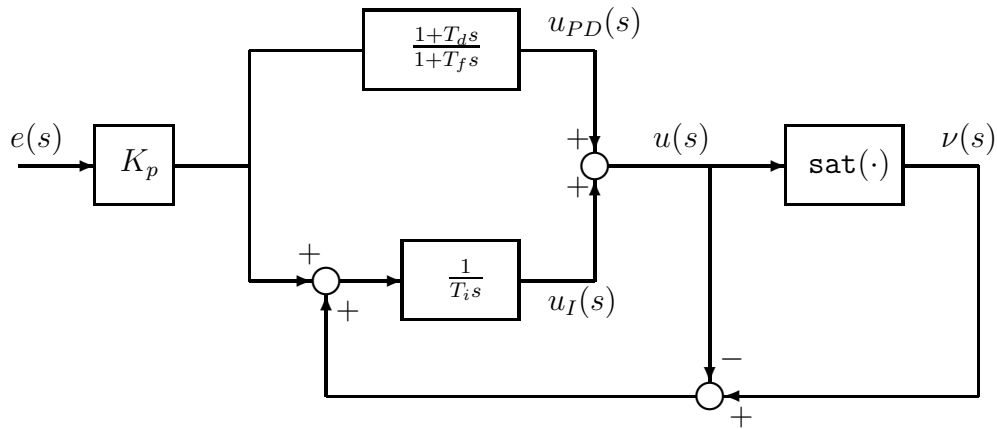
hvor integratoren utlades med en tidskonstant T_t . Sprangresponsen er her best for små T_t , men små verdier for T_t vil på den annen side kunne føre til at integratoren blir for følsom for støy. Et passende valg er derfor $T_t = T_i$.

Denne teknikken er vist på blokkdiagramform i fig. 10.8, og er enkel å implementere både analogt og digitalt.

10.5 PID-regulatorer i analog elektronikk

En P-regulator realiseres i analog elektronikk med en operasjonsforsterker og en enkel tilbakekobling som vist i fig. 10.9. Forsterkningen er gitt ved

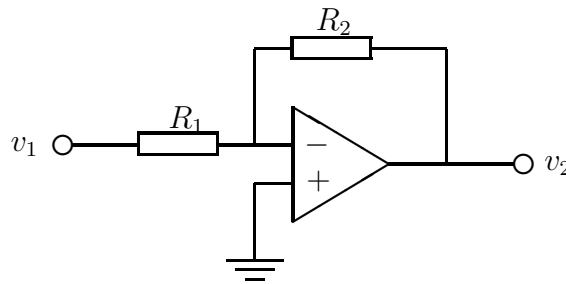
$$\frac{v_2(s)}{v_1(s)} = -\frac{R_2}{R_1} = -K_p \quad (10.54)$$



Figur 10.8: PID-regulator hvor integralledet utlades ved metning. Tidskonstanten T_t for utladning er satt lik integraltiden T_i .

Hvis R_1 og R_2 erstattes av komplekse impedanser Z_1 og Z_2 , fås

$$\frac{v_2}{v_1}(s) = -\frac{Z_2}{Z_1} \quad (10.55)$$



Figur 10.9: P-regulator

En ubegrenset PD-regulator er vist i figur 10.10. Transferfunksjonen er

$$\frac{v_2}{v_1}(s) = -\frac{R_2}{R_1}(1 + R_1 C s) = -K_p(1 + T_d s) \quad (10.56)$$

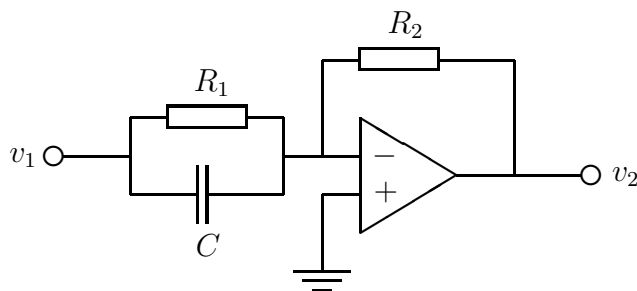
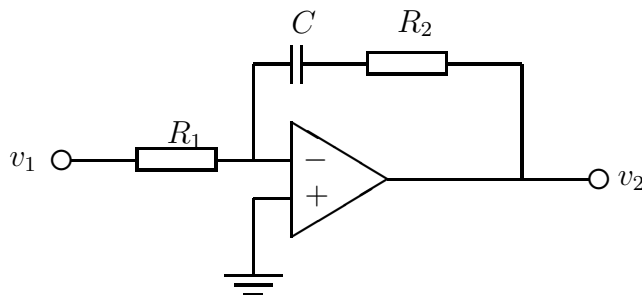
En ubegrenset PI-regulator er vist i figur 10.11. Transferfunksjonen er

$$\frac{v_2}{v_1}(s) = -\frac{R_2}{R_1} \frac{1 + R_2 C s}{R_2 C s} = -K_p \frac{1 + T_i s}{T_i s} \quad (10.57)$$

Problemer kan oppstå ved igangkjøring med denne type regulator hvis det ligger en stor ladning over kondensatoren, som svarer til at integralledet har en stor initialverdi. Det er da fare for at systemet får så stort pådrag at det er umulig å få det til å gå til referanseverdien. Det er ikke vanlig å ha et ekstra signal inn på regulatoren for nullstilling av integralledet. Disse problemene unngås med begrenset integralvirkning, hvor kondensatoren lades ut gjennom en motstand (figur 10.12).

En begrenset PD-regulator realiseres som vist i fig. 10.12 hvor transferfunksjonen er

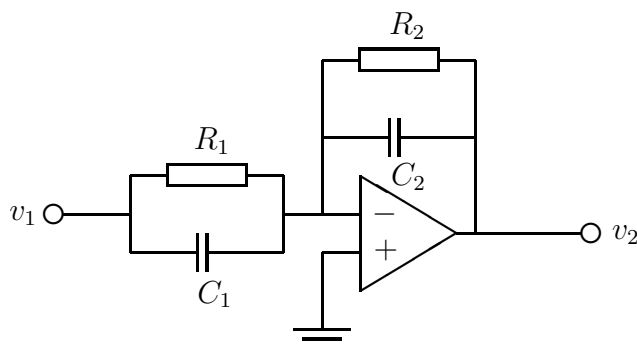
$$\frac{v_2}{v_1}(s) = -\frac{R_2}{R_1} \frac{1 + R_1 C_1 s}{1 + R_2 C_2 s} = -K_p \frac{1 + T_1 s}{1 + T_2 s} \quad (10.58)$$

Figur 10.10: *PD-regulator*Figur 10.11: *PI-regulator*

Dette er en begrenset PD-regulator hvis $T_1 < T_2$, mens det er en begrenset PI-regulator for $T_1 > T_2$. Ved å ta bort R_1 og bruke $C_1 = C_2 = C$ fås

$$\frac{v_2}{v_1}(s) = -\frac{R_2 C s}{1 + R_2 C s} = -\frac{T s}{1 + T s} \quad (10.59)$$

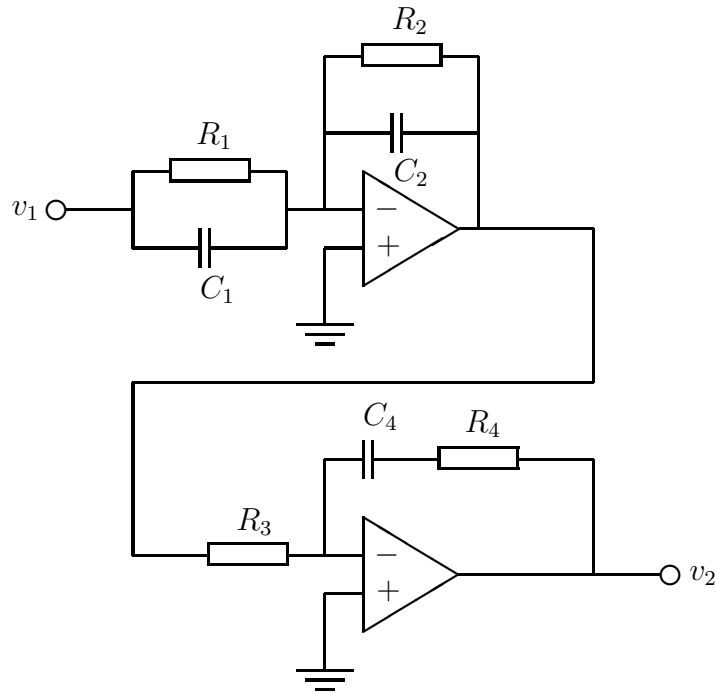
som er en begrenset derivasjon.



Figur 10.12: *Regulator med pol og nullpunkt. Regulatoren er en begrenset PD hvis $T_1 < T_2$, og en begrenset PI hvis $T_1 > T_2$. Ved å ta bort R_1 og bruke $C_1 = C_2$ fås en begrenset derivasjon.*

En PID-regulator med begrenset D-virkning er vist i fig. 10.13. Transferfunksjonen er

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{R_2 R_3 (1 + R_4 C_4 s)(1 + R_3 C_3 s)}{R_1 R_4 (R_4 C_4 s(1 + R_2 C_2 s))} = K_p \frac{(1 + T_i s)(1 + T_d s)}{T_i s(1 + T_f s)} \quad (10.60)$$



Figur 10.13: Analog PID-regulator med begrenset derivatvirkning.

10.6 PD1 og PD2

En prosess $y(s) = h_u(s)u(s)$ skal styres med en PD-regulator. En PD-regulator

$$u(s) = K_p \frac{1 + T_d s}{1 + T_f s} (y_0(s) - y(s)) \quad (10.61)$$

hvor y er måling og y_0 er referanse, betegnes med **PD1**. Bruk av denne regulatoren innebærer derivasjon av referansen y_0 . Dette vil i mange tilfeller være ugunstig for systemets ytelse. En diskontinuerlig referanse er ikke deriverbar, og store transienter kan oppstå hvis en bruker regulatoren (10.61) når referansen inneholder sprang.

En modifisert PD-regulator som betegnes **PD2** er

$$u(s) = K_p y_0(s) - K_p \frac{1 + T_d s}{1 + T_f s} y(s) \quad (10.62)$$

Her deriveres ikke referansen, og god ytelse oppnås også når referansen inneholder sprang. I en analog realisering filtreres y med en begrenset PD-regulator som vist i figur 10.12 med $R_1 = R_2$ før den adderes til referansen og forsterkes med en P-regulator som vist i fig. 10.9.

Sløyfetransferfunksjonen er

$$h_0(s) = K_p \frac{1 + T_d s}{1 + T_f s} h_u(s) \quad (10.63)$$

både for PD1 og PD2, og dette betyr at fasmargin, forsterkningsmargin og avvikforholdet $N(s) = (1 + h_0(s))^{-1}$ er lik for de to regulatorene. I posisjonssløyfen for en motor gir imidlertid PD2 redusert hastighetskonstant.

Innen servoteknikken, og spesielt i robotstyring, er ofte referansen generert ved spesifisering av akselerasjon, og hastighets- og posisjonsreferansen fås ved å integrere akselerasjonsreferansen. I dette tilfelle er det en god løsning å benytte en modifisert referanse

$$y_{ref} = y_0(s) + T_d \dot{y}_0(s) \quad (10.64)$$

eller

$$y_{ref} = \frac{1}{1 + T_f s} (y_0(s) + T_d \dot{y}_0(s)) \quad (10.65)$$

i en PD2-regulator. En modifisert referanse som gitt av lign. (10.65) gir transferfunksjonen (10.61) fra y_0 til $u(s)$ uten derivasjon av referansen, mens den modifiserte referansen (10.64), som er en litt enklere løsning, gir tilnærmet samme resultat. Bruk av en modifisert referanse gitt av lign. (10.64) og (10.65) kan forøvrig betraktes som styring med foroverkobling fra \dot{y}_0 som er behandlet i kapittel 9.1.2.

Eksempel 10.8 En motor har transferfunksjonen

$$\frac{y}{u}(s) = h_u(s) = \frac{K}{s(1 + T_s)} \quad (10.66)$$

En posisjonsreferanse $y_0(t)$ er gitt.

En PD1-regulator

$$h_r(s) = K_p \frac{1 + T_d s}{1 + T_f s} \quad (10.67)$$

brukes med $T_d = T$ som gir

$$h_0(s) = h_r(s)h_u(s) = \frac{K_v}{s(1 + T_f s)} \quad (10.68)$$

Hastighetskonstanten er $K_v = K K_p$.

Denne regulatoren gir null stasjonært avvik i posisjon ved sprang i referansen siden systemet er av type 1. Posisjonsavviket ved følgning av en rampe med hastighet v_0 er $e_0 = v_0/K_v$.

En PD2-regulator

$$u = K_p y_0(s) - K_p \frac{1 + T_d s}{1 + T_f s} y(s) \quad (10.69)$$

med de samme regulatorparameterene som i PD1-regulatoren gir også null stasjonært posisjonsavvik pga den åpne integrasjonen fra hastighet til posisjon. For en PD2-regulator er imidlertid hastighetskonstanten mindre enn hvis en PD1 brukes. Dette kan finnes ved bruk av sluttverditeoremet i s -planet:

$$e(s) = y_0(s) - y(s) = \left[1 - \frac{K_v \frac{1}{s(1+T_s)}}{1 + h_0(s)}\right] y_0 \quad (10.70)$$

Etter litt regning fås

$$e(s) = \frac{1 + K_v(T - T_f) \frac{1}{(1+T_s)(1+T_f s)}}{1 + \frac{K_v}{s(1+T_f s)}} y_0(s) \quad (10.71)$$

Med $y_0(s) = v_0/s^2$ gir sluttverditeoremet et stasjonært avvik

$$e_0 = \frac{1 + K_v(T - T_f)}{K_v} v_0 \quad (10.72)$$

Hastighetskonstanten for PD2-regulatoren er altså

$$K_v^{PD2} = \frac{K_v}{1 + K_v(T - T_f)} < K_v \quad (10.73)$$

som er mindre enn for PD1.

Dette resultatet kan forklares ut fra at en PD1-regulator utnytter informasjon om hastigheten til referansen.

Hastighetskonstanten for en PD2-regulator kan bli lik hastighetskonstanten for en PD1-regulator på følgende måte: En modifisert referanse y_m genereres ved filtrering av referansen med et høyere ordens filter (se kapittel 9.3.4). Denne modifiserte referansen brukes som inngang til en PD2-regulator med foroverkobling fra den filtrerte hastighetsreferansen \dot{y}_m . Dette gir samme hastighetskonstant som for en PD1-regulator. ■

Mulige løsninger er:

1. Referansen kan filtreres med et andre eller tredjeordens filter og en PD2-regulator brukes. Dette gir tilnærmet samme hastighetskonstant som for en PD1-regulator dersom filterets båndbredde er stor, og derivasjon av spranget unngås.
2. Den ufiltrerte referansen brukes som inngang til en PD2-regulator. Dermed unngås derivasjon av sprang, men hastighetskonstanten reduseres.
3. En PD1-regulator brukes. Dette gir store pådragsverdier ved sprang i referansen på grunn av derivasjonen av referansen, men hastighetskonstanten er høy.

10.7 Frekvensbegrenset derivasjon

En vanlig problemstilling i servoteknikken er at kun en posisjonsmåling er tilgjengelig, og at man ønsker å finne hastigheten ved frekvensbegrenset derivasjon av posisjons-signalet. Grunnen til at derivasjonen må være frekvensbegrenset er at høyfrekvent støy vil gi meget store forstyrrelser ved ubegrenset derivasjon.

Eksempel 10.9 Med en PD-regulator søker man å realisere en tilbakekobling

$$u = K_p(y_0 - y) + K_p T_d(v_0 - v) \quad (10.74)$$

hvor v er hastigheten og v_0 er hastighetsreferansen. Hvis hastigheten ikke måles, kan den frekvensbegrensede derivasjonen

$$v_0 - \hat{v}(s) = \frac{s}{1 + T_f s} (y_0(s) - y(s)) \quad (10.75)$$

brukes, og tilbakekobling tas fra den beregnede hastigheten \hat{v} i stedet for v . Dette gir PD-regulatoren

$$u(s) = K_p \left(1 + \frac{T_d s}{1 + T_f s}\right) (y_0(s) - y(s)) \approx K_p \frac{1 + T_d s}{1 + T_f s} (y_0(s) - y(s)) \quad (10.76)$$

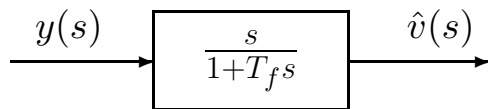
siden $T_f \ll T_d$ i en PD-regulator. ■

10.7.1 Derivasjon med førsteordens filter

Den enkleste form for frekvensbegrenset derivasjon er av første orden:

$$\hat{v}(s) = \frac{s}{1 + T_f s} y(s) \quad (10.77)$$

hvor \hat{v} er den beregnede hastighet og y er posisjonsmålingen som vist i figur 10.14. Ved



Figur 10.14: Frekvensbegrenset derivasjon av første orden

innsetting av $s = j\omega$ i lign. (10.77) finnes tilnærmingen

$$\hat{v}(j\omega) \approx j\omega y(j\omega) = v(j\omega), \quad \omega \ll \frac{1}{T_f} \quad (10.78)$$

som viser at $\hat{v}(t)$ er tilnærmet den tidsderiverte av $y(t)$ for frekvenser under knekkfrekvensen $1/T_f$. For høyere frekvenser gjelder

$$\hat{v}(j\omega) \approx \frac{1}{T_f} y(j\omega), \quad \omega \gg \frac{1}{T_f} \quad (10.79)$$

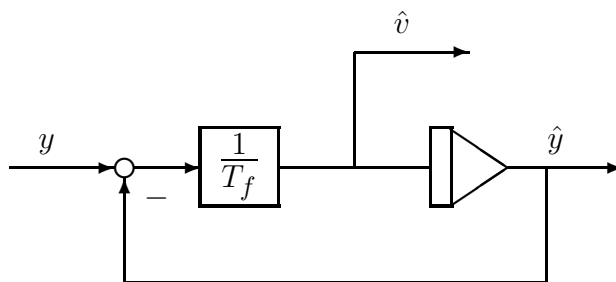
Derivasjonen er altså begrenset i frekvens.

Den frekvensbegrensede derivasjonen som gitt i s -planet av lign. (10.77) kan realiseres i tidsplanet med

$$\hat{v} = \frac{1}{T_f} (y - \hat{y}) \quad (10.80)$$

$$\dot{\hat{y}} = \hat{v} \quad (10.81)$$

hvor \hat{v} er en beregnet hastighet. Blokkdiagrammet er vist i figur 10.15.



Figur 10.15: Realisering av førsteordens frekvensbegrenset derivasjon

Den beregnede hastigheten integreres opp til en beregnet posisjon \hat{y} . Den beregnede hastigheten er proporsjonal med avviket mellom målt og beregnet posisjon.

Denne type derivasjon brukes i en vanlig PD-regulator. \hat{v} er gitt av den faktiske hastigheten $v(s) = sy(s)$ ved

$$\hat{v}(s) = \frac{1}{1 + T_f s} v(s) \quad (10.82)$$

Hastighetsavviket er dermed

$$\tilde{v}(s) = v(s) - \hat{v}(s) = \left(1 - \frac{1}{1 + T_f s}\right)v(s) = \frac{T_f s}{1 + T_f s}v(s) \quad (10.83)$$

Ifølge sluttverditeoremet er da stasjonært avvik i beregnet hastighet

$$\tilde{v}_s = \lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{v}(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{T_f s}{1 + T_f s} v(s) \quad (10.84)$$

Dette medfører:

1. Hvis hastigheten er konstant $v(t) = v_0$, så er

$$\tilde{v}_s = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{T_f s^2}{1 + T_f s} \frac{v_0}{s} = 0 \quad (10.85)$$

2. En rampe i hastighet $v(t) = a_0 t$ gir

$$\tilde{v}_s = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{T_f s^2}{1 + T_f s} \frac{a_0}{s^2} = T_f a_0 \quad (10.86)$$

som er et stasjonært avvik i beregnet hastighet.

3. En parabel i hastighet $v(t) = \frac{1}{2} r_0 t^2$ gir

$$\tilde{v}_s = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{T_f s^2}{1 + T_f s} \frac{r_0}{s^3} = \infty \quad (10.87)$$

10.7.2 Derivasjon med andreordens filter

Vi skal nå se på høyere ordens derivasjonsfiltere med en spesiell struktur³.

En andreordens frekvensbegrenset derivasjon er

$$\hat{v}(s) = s \frac{k_2}{s^2 + k_1 s + k_2} y(s) \quad (10.88)$$

hvor k_1 og k_2 er designparametre.

Denne transferfunksjonen kan realiseres med tilstandsromformuleringen

$$\dot{\hat{v}} = k_2 \epsilon \quad (10.89)$$

$$\dot{\hat{y}} = \hat{v} + k_1 \epsilon \quad (10.90)$$

hvor

$$\epsilon = y - \hat{y} \quad (10.91)$$

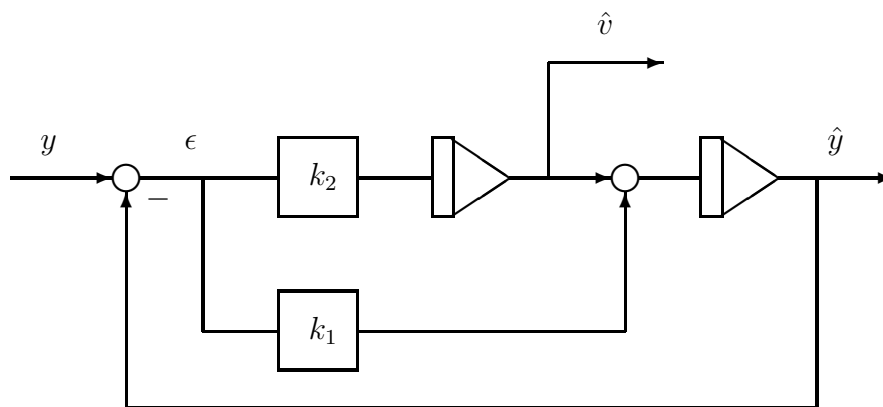
Blokkdiagrammet er vist i figur 10.16.

Avvik i beregnet hastighet er i dette tilfelle

$$\tilde{v}(s) = v(s) - \hat{v}(s) = \frac{s(s + k_1)}{s^2 + k_1 s + k_2} v(s) \quad (10.92)$$

som finnes ved av $y(s) = \frac{1}{s} v(s)$ og lign. (10.88).

³Disse derivasjonsfilterene har samme struktur som et enkelt Kalmanfilter eller en modal estimator (*observer*).



Figur 10.16: Realisering av andreordens frekvensbegrenset derivasjon

1. Hvis hastigheten er konstant $v(t) = v_0$, så er

$$\tilde{v}_s = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^2(s + k_1)}{s^2 + k_1s + k_2} \frac{v_0}{s} = 0 \quad (10.93)$$

2. En rampe i hastighet $v(t) = a_0t$ gir

$$\tilde{v}_s = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^2(s + k_1)}{s^2 + k_1s + k_2} \frac{a_0}{s^2} = \frac{k_1}{k_2} a_0 \quad (10.94)$$

som er et stasjonært avvik.

3. En parabel i hastighet $v(t) = \frac{1}{2}r_0t^2$ gir

$$\tilde{v}_s = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^2(s + k_1)}{s^2 + k_1s + k_2} \frac{r_0}{s^3} = \infty \quad (10.95)$$

10.7.3 Derivasjon med tredjeordens filter

En tilsvarende derivasjon av tredje orden er

$$\hat{v}(s) = s \frac{k_2s + k_3}{s^3 + k_1s^2 + k_2s + k_3} y(s) \quad (10.96)$$

hvor k_1 , k_2 og k_3 er designparametre. Denne derivasjonen kan realiseres ved tilstandsromformuleringen

$$\epsilon = y - \hat{y} \quad (10.97)$$

$$\dot{\hat{a}} = k_3\epsilon \quad (10.98)$$

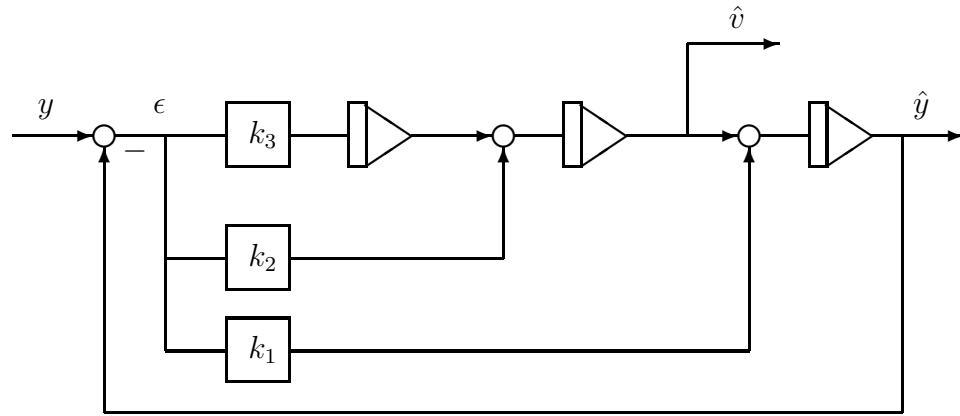
$$\dot{\hat{v}} = \hat{a} + k_2\epsilon \quad (10.99)$$

$$\dot{\hat{y}} = \hat{v} + k_1\epsilon \quad (10.100)$$

som har blokkdiagram som vist i figur 10.17

Avvik i beregnet hastighet finnes av $y(s) = \frac{1}{s}v(s)$ og lign. (10.96)

$$\tilde{v}(s) = v(s) - \hat{v}(s) = \frac{s^2(s + k_1)}{s^3 + k_1s^2 + k_2s + k_3} v(s) \quad (10.101)$$



Figur 10.17: Realisering av tredjeordens frekvensbegrenset derivasjon

1. Hvis hastigheten er konstant $v(t) = v_0$, så er

$$\tilde{v}_s = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^3(s + k_1)}{s^3 + k_1s^2 + k_2s + k_3} \frac{v_0}{s} = 0 \quad (10.102)$$

2. En rampe i hastighet $v(t) = a_0t$ gir

$$\tilde{v}_s = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^3(s + k_1)}{s^3 + k_1s^2 + k_2s + k_3} \frac{a_0}{s^2} = 0 \quad (10.103)$$

dvs null stasjonært avvik.

3. En parabel i hastighet $v(t) = \frac{1}{2}r_0t^2$ gir

$$\tilde{v}_s = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^3(s + k_1)}{s^3 + k_1s^2 + k_2s + k_3} \frac{r_0}{s^3} = \frac{k_1}{k_3} r_0 \quad (10.104)$$

som er et stasjonært avvik.

Konklusjonen på disse beregningene er at andreordens derivasjonen som gitt i lign. (10.88) neppe er bedre enn den enklere førsteordens derivasjonen som gitt i lign. (10.77). Tredjeordens derivasjon som gitt i lign. (10.96) er imidlertid mer nøyaktig, og kan være interessant å bruke i visse tilfeller.

10.8 Filtrering av målesignaler

10.8.1 Innledning

Et målesignal kan inneholde høyfrekvent støy som kan være av en slik styrke at det er ønskelig å filtrere målingen før den går inn på regulatoren. Aktuelle filtre er lavpassfiltre og sugfiltre. Det er viktig å huske på at filterets transferfunksjon vil inngå i sløyfetransferfunksjonen. Det er derfor viktig at filteret ikke gir for stort negativt fasebidrag ved kryssfrekvensen ettersom dette vil redusere fasemarginen.

10.8.2 Klassiske lavpassfiltre

De klassiske lavpassfiltre er [37]

- Butterworth-filteret som har en frekvensrespons som er optimalisert for å gi maksimum flat amplitude i passbåndet som er opp til filterets knekkfrekvens.
- Chebychev-filteret har rippel i passbåndet, men gir en brattere filterflanke.
- Bessel-filteret som er optimalisert for å gi lineær fasegang og dermed konstant tidsforskyvning i passbåndet.

Butterworth lavpassfiltre av orden 1 til 4 er gitt av

$$\frac{1}{s+1}$$

$$\frac{1}{s^2 + 1.1414s + 1}$$

$$\frac{1}{s^3 + 2s^2 + 2s + 1}$$

$$\frac{1}{s^4 + 2.61s^3 + 3.41s^2 + 2.61s + 1}$$

Chebychev lavpassfiltre av orden 1 til 4 med ripple på 1 dB i passbåndet er gitt av

$$\frac{1.97}{s + 1.97}$$

$$\frac{0.983}{s^2 + 1.098s + 1.103}$$

$$\frac{0.491}{s^3 + 0.988s^2 + 1.238s + 0.491}$$

$$\frac{0.246}{s^4 + 0.953s^3 + 1.454s^2 + 0.743s + 0.276}$$

Bessel lavpassfiltre av orden 1 til 4 er gitt av

$$\frac{1}{s+1}$$

$$\frac{3}{s^2 + 3s + 3}$$

$$\frac{15}{s^3 + 6s^2 + 15s + 15}$$

$$\frac{105}{s^4 + 10s^3 + 45s^2 + 105s + 105}$$

Figur 10.18: Frekvensrespons for sugefilter med $\zeta_t = 0.01$, $\zeta_n = 1$ og $\omega_0 = 1$

Filtrene er presentert på normalisert form med knekkfrekvens lik 1. En knekkfrekvens ω_0 oppnås ved å substituere

$$s \rightarrow \frac{s}{\omega_0}$$

Et filter konverteres til et normalisert høypassfilter ved å substituere

$$s \rightarrow \frac{1}{s}$$

10.8.3 Sugefilter

Et sugefilter (*notch filter*) har transferfunksjonen

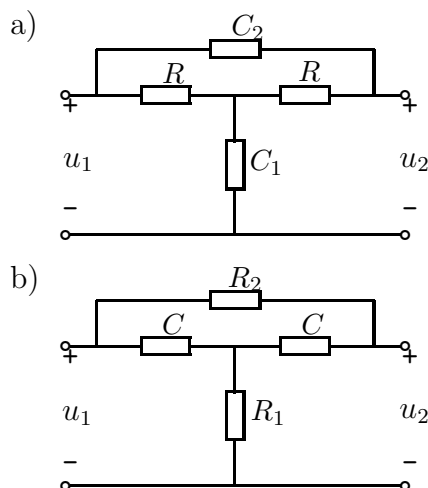
$$h(s) = \frac{1 + 2\zeta_t \frac{s}{\omega_0} + \frac{s^2}{\omega_0^2}}{1 + 2\zeta_n \frac{s}{\omega_0} + \frac{s^2}{\omega_0^2}} \quad (10.105)$$

Her er udempet resonansfrekvens den samme i teller og nevner. Filteret skal ha kritisk eller overkritisk demping i nevner ($\zeta_n \geq 1$), og liten demping i teller ($\zeta_t \ll 1$).

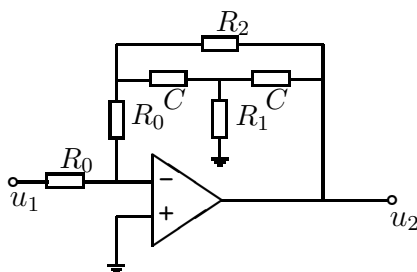
Filteret demper frekvenskomponenter omkring ω_0 . Filterets frekvensrespons er vist i figur 10.18 for $\zeta_t = 0.01$, $\zeta_n = 1$ og $\omega_0 = 1$. Viktige egenskaper ved filteret er:

1. Hvis $\omega \ll \omega_0$ eller $\omega \gg \omega_0$, så er

$$h(j\omega) \approx 1 \quad (10.106)$$



Figur 10.19: Sugefilter realisert i passive kretser



Figur 10.20: Sugefilter realisert med aktiv krets

2. For frekvensen ω_0 er

$$h(j\omega_0) = \frac{\zeta_t}{\zeta_n} \ll 1 \quad (10.107)$$

Ved å velge forholdet mellom ζ_t og ζ_n kan ønsket demping av signalet ved frekvensen ω_0 oppnås.

3. Fasen oppfyller

$$|\angle h(j\omega)| < 90^\circ \quad (10.108)$$

for alle ω .

Et sugfilter kan være nyttig for å dempe kraftig forstyrrelse ved en bestemt frekvens f.eks. fra nettfrekvensen på 50 Hz. En forutsetning for bruk i reguleringssystemer er imidlertid at ω_0 ligger tilstrekkelig høyt i forhold til kryssfrequensen slik at dette ikke resulterer i for liten fasemargin.

To realiseringer av filteret ved passive kretser er vist i figur 10.8.3. De to filterene har transferfunksjoner

$$\frac{u_2}{u_1}(s) = \frac{1 + 2RC_1s + R^2C_1C_2s^2}{1 + R(C_1 + 2C_2)s + R^2C_1C_2s^2} \quad (10.109)$$

og

$$\frac{u_2}{u_1}(s) = \frac{1 + 2R_1Cs + C^2R_1R_2s^2}{1 + C(R_2 + 2R_1)s + C^2R_1R_2s^2} \quad (10.110)$$

En realisering i aktive kretser er vist i figur 10.20.

10.9 Modellbasert filtrering

10.9.1 Innledning

Viktige spesifikasjoner ved utvikling av et servosystem kan være:

1. Nedre begrensning på sløyfeforsterkningen $|h_0(j\omega)|$ opp til en viss frekvens for å oppnå god nøyaktighet.
2. Øvre begrensning på sløyfeforsterkningen $|h_0(j\omega)|$ over en spesifisert frekvens for å begrense innvirkning fra høyfrekvent støy.

Disse to spesifikasjonene vil det i noen tilfeller være vanskelig å oppfylle samtidig. Dette skjer hvis krav til høy forsterkning ved lave frekvenser dikterer en kryssfrequens som ligger i frekvensområdet til støyen.

Eksempel 10.10 Gitt prosessen

$$\frac{y}{u}(s) = h(s) = \frac{1}{s^2} \quad (10.111)$$

Det er spesifisert at:

1. $|h_0(j0.1)| \geq 100$ (= 40 dB) for å få en tilfredsstillende nøyaktighet.
2. Systemet utsettes for kraftig støy ved $\omega = 10$ rad/s, og det er derfor spesifisert at $|h_0(j10)| \leq 0.01$ (= -40 dB).
3. Systemet skal ha en fasemargin på $\psi = 55^\circ$.
4. Systemet skal ikke være ubetinget stabilt hvilket vil si at $\angle h_0(j\omega) > -180^\circ$ for alle $\omega < \omega_c$.

En PD-regulator

$$h_r(s) = \frac{1 + \frac{s}{0.56}}{1 + \frac{s}{5.6}} \quad (10.112)$$

oppfyller punkt 1, 3 og 4 på spesifikasjonslisten, men punkt 2 kan ikke oppfylles siden $|h_0(j10)| \leq 0.1$ (-20 dB).

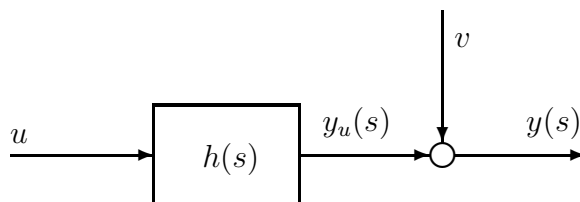
Det ville være gunstig hvis støyen ved $\omega = 10$ rad/s kunne filtreres vekk ved bruk av et båndstopfilter eller et sugefilter. Dette ville imidlertid resultere i redusert fasemargin på grunn av det negative fasebidraget fra filteret ved kryssfrequensen $\omega_c = 1.78$ rad/s, og løsningen er derfor ikke akseptabel. ■

Gitt en prosess beskrevet ved

$$y(s) = h(s)u(s) + v(s) \quad (10.113)$$

hvor $y(t)$ er måling, $u(t)$ er pådrag og $v(t)$ er en forstyrrelse. Prosessen er vist i figur 10.21.

Anta at:

Figur 10.21: *Prosess*

1. Transferfunksjonen $h(s)$ har orden n og kan skrives

$$h(s) = \frac{b_0 + b_1s + b_2s^2 \dots b_{n_t}s^{n_t}}{a_0 + a_1s + a_2s^2 \dots a_ns^n} \quad (10.114)$$

hvor $n_t < n$.

2. Forstyrrelsen $v(t)$ kan ikke måles.
3. Signalet $v(t)$ har et spekter $v(j\omega)$ som kan tilnærmes med

$$v(j\omega) \approx h_v(j\omega) \quad (10.115)$$

hvor $h_v(s)$ kan skrives på formen

$$h_v(s) = \frac{\beta_0 + \beta_1s + \beta_2s^2 \dots \beta_{n_{vt}}s^{n_{vt}}}{\alpha_0 + \alpha_1s + \alpha_2s^2 \dots \alpha_{n_v}s^{n_v}} \quad (10.116)$$

og $n_{vt} < n_v$.

Eksempel 10.11 Et typisk eksempel på et støyspektrum kan være $v(j\omega) = h_v(j\omega)$ hvor h_v er gitt som

$$h_v(s) = \frac{\beta_1s}{1 + 2\zeta\frac{s}{\omega_0} + \frac{s^2}{\omega_0^2}} \quad (10.117)$$

Den logaritmiske amplitudekurven har vinkelkoeffisient $+1$ for $\omega < \omega_0$ og -1 for $\omega > \omega_0$. Spekteret har en resonanstopp for $\omega = \omega_0$ hvor

$$h_v(j\omega_0) = \frac{\beta_1\omega_0}{2\zeta} \quad (10.118)$$

som er inverst proporsjonal med den relative dempingen ζ . ■

Målingen er summen av målingen som kommer fra pådraget og målingen som kommer fra støyen. Dette kan skrives

$$y = y_u + v \quad (10.119)$$

hvor

$$y_u(s) = h(s)u(s) \quad (10.120)$$

Det ville være gunstig hvis det var mulig å filtrere vekk støyen fra målingen, uten at filterets transferfunksjon innvirket på transferfunksjonen fra pådrag til filtrert måling.

10.9.2 Filter

Vi skal se på følgende filterstruktur⁴:

$$\hat{y}_u(s) = h(s)u(s) + k(s)h(s)[y(s) - \hat{y}(s)] \quad (10.121)$$

og

$$\hat{v}(s) = k_v h_v(s)[y(s) - \hat{y}(s)] \quad (10.122)$$

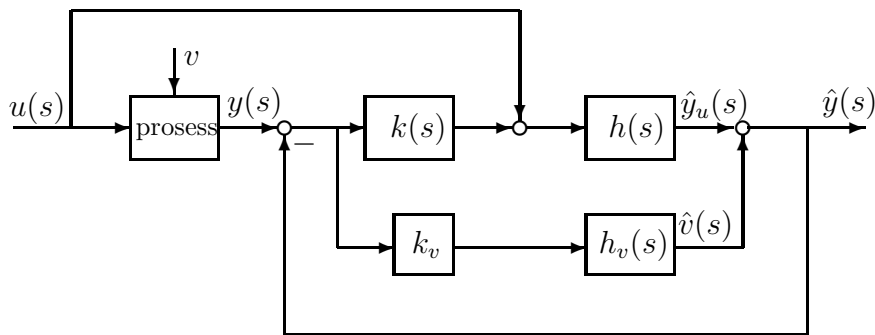
hvor

$$\hat{y}(s) = \hat{y}_u(s) + \hat{v}(s) \quad (10.123)$$

Her er k_v en skalar. Transferfunksjonen $k(s)h(s)$ er gitt av

$$k(s)h(s) = \frac{c_0 + c_1 s + c_2 s^2 \dots c_{n-1} s^{n-1}}{a_0 + a_1 s + a_2 s^2 \dots a_n s^n} \quad (10.124)$$

hvor $c_0 \dots c_{n-1}$ er designparametre, og nevneren er identisk med nevneren i $h(s)$. Ideen med filteret er å bruke prosessens modell og støyens spektrum for å finne en tilnærming \hat{y}_u til y_u . Et blokkdiagram for filteret er vist i figur 10.22.



Figur 10.22: *Filterstruktur*

Det bør bemerkes at transferfunksjonen $k(s)$ ikke er realiserbar hvis $n_t < n - 1$. $k(s)$ opptrer imidlertid alltid i produkt med $h(s)$ i filteret, og $k(s)h(s)$ er alltid realiserbar.

10.9.3 Analyse av filter

For å analysere dette filteret innføres transferfunksjonen

$$g_0(s) = k(s)h(s) + k_v h_v(s) \quad (10.125)$$

Dette er filterets sløyfetransferfunksjon. Transferfunksjonen $k(s)h(s)$ og forsterkningen k_v må velges slik at filteret er stabilt. Stabilitet av filteret analyseres som vanlig for tilbakekoblede systemer. Dette kan gjøres ved å studere $g_0(s)$ i Bodediagram, eller ved å velge polene til filteret.

Ved bruk av filterets sløyfetransferfunksjon $g_0(s)$ kan \hat{y} skrives

$$\hat{y}(s) = h(s)u(s) + g_0(s)[y(s) - \hat{y}(s)] \quad (10.126)$$

⁴Denne filterstrukturen er den samme som i et Kalmanfilter med modell av støyen. Kalmanfilteret er formulert på tilstandsromform, og filterparameterne er gitt av støyens kovarians.

Videre er

$$y(s) - \hat{y}(s) = \frac{1}{1 + g_0(s)}y(s) - \frac{h(s)}{1 + g_0(s)}u(s) \quad (10.127)$$

Transferfunksjonene fra $y_u(s)$ og $v(s)$ til de filtrerte signalene \hat{y}_u og \hat{v} kan dermed finnes ved innsetting av $y_u(s) = h(s)u(s)$ og $y = y_u + v$. Dette gir

$$\hat{y}_u(s) = y_u(s) + \frac{k(s)h(s)}{1 + g_0(s)}v(s) \quad (10.128)$$

og

$$\hat{v}(s) = \frac{k_v h_v(s)}{1 + g_0(s)}v(s) \quad (10.129)$$

Ideelt sett skulle de filtrerte verdiene ha vært

$$\hat{y}_u^{ideell}(s) = y_u(s) \quad (10.130)$$

og

$$\hat{v}^{ideell}(s) = v(s) \quad (10.131)$$

For å analysere hvor godt resultatet er sammenlignes lign. (10.128) og (10.129) med de ideelle ligningene (10.130) og (10.131).

1. Hvis $g_0 \gg 1$ og $k_v h_v \gg kh$, så er $1 + g_0 \approx k_v h_v$ og

$$\hat{y}_u \approx y_u + \frac{kh}{k_v h_v}v \approx y_u \quad (10.132)$$

og

$$\hat{v} \approx \frac{k_v h_v}{k_v h_v}v = v \quad (10.133)$$

De filtrerte verdiene er altså tilnærmet lik de ideelle verdiene.

2. Hvis $g_0 \gg 1$ og $k_v h_v \ll kh$, så er $1 + g_0 \approx kh$ og

$$\hat{y}_u \approx y_u + \frac{kh}{kh}v \approx y_u + v \quad (10.134)$$

og

$$\hat{v} \approx \frac{k_v h_v}{kh}v \approx 0 \quad (10.135)$$

I dette tilfelle er ikke filteret aktivt, men slipper støyen igjennom.

Filterparameterne $k(s)$ og k_v må velges. Følgende retningslinjer gis:

1. Forsterkningen k_v må velges slik at $k_v h_v \gg kh$ i frekvensområdet hvor støyen skal dempes.
2. Transferfunksjonen kh må designes slik at $g_0 = k_v h_v + kh \gg 1$ for alle frekvenser opp til en dekode over kryssfrekvensen, og dessuten slik at filteret er stabilt.

10.9.4 Realisering ved bruk av fysisk modell

Gitt tilstandsrommodellen

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u \quad (10.136)$$

$$y = \mathbf{d}^T \mathbf{x} \quad (10.137)$$

som har transferfunksjonen

$$h(s) = \frac{y}{u}(s) = \mathbf{d}^T (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{b} \quad (10.138)$$

Tilstandsrommodellen sies da å være en **realisering** av transferfunksjonen $h(s)$. En realisering av $h_v(s)$ er gitt ved

$$\dot{\mathbf{x}}_v = \mathbf{A}_v \mathbf{x}_v + \mathbf{b}_v \epsilon \quad (10.139)$$

$$v = \mathbf{d}_v^T \mathbf{x}_v \quad (10.140)$$

hvor ϵ er et skalart signal og

$$h_v(s) = \frac{v}{\epsilon}(s) = \mathbf{d}_v^T (s\mathbf{I} - \mathbf{A}_v)^{-1} \mathbf{b}_v \quad (10.141)$$

En realisering av filteret er da

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{b}u + \mathbf{k}(y - \hat{y}) \quad (10.142)$$

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}}_v = \mathbf{A}_v \hat{\mathbf{x}}_v + \mathbf{b}_v k_v (y - \hat{y}) \quad (10.143)$$

$$\hat{y}_u = \mathbf{d}^T \hat{\mathbf{x}} \quad (10.144)$$

$$\hat{v} = \mathbf{d}_v^T \hat{\mathbf{x}}_v \quad (10.145)$$

$$\hat{y} = \hat{y}_u + \hat{v} \quad (10.146)$$

Her er \mathbf{k} og k_v filterets designparametre.

Dette er en tilstandsromformulering av filteret gitt av lign. (10.121–10.124) hvor

$$k(s)h(s) = \mathbf{d}^T (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{k} \quad (10.147)$$

og

$$k_v(s)h_v(s) = \mathbf{d}_v^T (s\mathbf{I} - \mathbf{A}_v)^{-1} \mathbf{b}_v k_v \quad (10.148)$$

Tilstandsrommodellen er vist i figur 10.23.

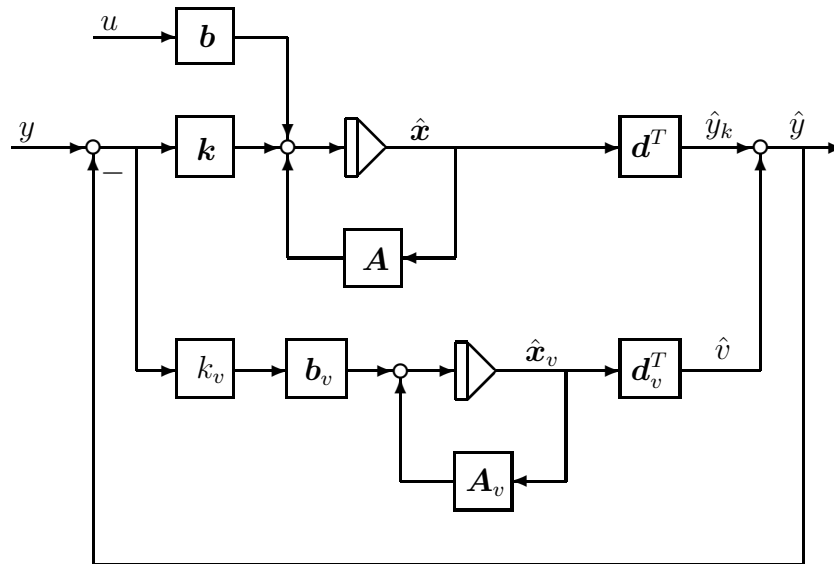
10.9.5 Konsekvenser ved bruk i tilbakekobling

Vi skal her se på bruk av filteret ved tilbakekobling. Anta at filteret er effektivt for frekvenser opp til kryssfrekvensen slik at det filtrerte signalet er

$$\hat{y}_u \approx h(s)u(s) \quad (10.149)$$

I så fall kan systemet styres med tilbakekobling fra \hat{y}_u uten å ta hensyn til filteret. Dette er et meget godt resultat.

Ved vanlig filtrering av målingen og tilbakekobling fra det filtrerte signalet kommer filterets transferfunksjon inn i sløyfetransferfunksjonen. I alle tilfeller hvor man forsøker å filtrere vekk støy i nærheten av kryssfrekvensen vil filteret introdusere negativ fase i sløyfetransferfunksjonen, og kryssfrekvensen må reduseres for å oppnå akseptable stabilitetsmarginer. Hovedforskjellen mellom filteret som presenteres her og vanlig filtrering er foroverkoblingen fra pådraget i lign. (10.121) og bruken av transferfunksjonen $h_v(s)$ som er gitt av spekteret til støyen.



Figur 10.23: Realisering på tilstandsromform.

10.9.6 Eksempel fra dynamisk posisjonering

Denne metoden kan benyttes ved bølgefiltrering i dynamisk posisjonering.⁵ Her er problemet at målingene er befengt med støy som skyldes skipets bevegelse i bølger. Det er ikke ønskelig å kople tilbake fra målingene direkte fordi dette vil gi et oscillatorisk pådragssignal (såkalt *thrustermodulasjon*) som fører til økt drivstofforbruk og økt slitasje. Vi velger å se på én av skipets frihetsgrader — langskipsbevegelsen (jag).

Skipets bevegelse kan deles i to: 1) *lavfrekvensbevegelse* f.eks. skyldes påvirkning av konstant strøm og vind, som man ønsker å motvirke med reguleringsystemet og 2) *høyfrekvensbevegelse* som skyldes bølgepåvirkning og som man ikke ønsker å kompensere med reguleringsystemet. En forenklet modell av lavfrekvensbevegelsen i jag er gitt ved

$$\dot{x}_L = u_L \quad (10.150)$$

$$\dot{u}_L = \frac{1}{m_x} F_{Tx} \quad (10.151)$$

der m_x er skipets tregghet og F_{Tx} er thrusterkraften. Vi ser her bort fra andre kraftpåvirkninger. Transferfunksjonen er gitt ved

$$h_{LF}(s) = \frac{x_L}{F_{Tx}}(s) = \frac{1}{m_x s^2} \quad (10.152)$$

Støyen x_H har spekteret $x_H(j\omega) = h_{LF}(j\omega)$ hvor

$$h_v(s) = h_{HF}(s) = \frac{\beta_1 \omega_0^2 s}{s^2 + 2\zeta \omega_0 s + \omega_0^2} \quad (10.153)$$

En realisering av $h_{HF}(s)$ er gitt av den dempede oscillatoren

$$\dot{x}_{v1} = x_{v2} \quad (10.154)$$

$$\dot{x}_{v2} = -2\zeta \omega_0 x_{v2} - \omega_0^2 x_{v1} + \beta_1 \omega_0^2 \epsilon \quad (10.155)$$

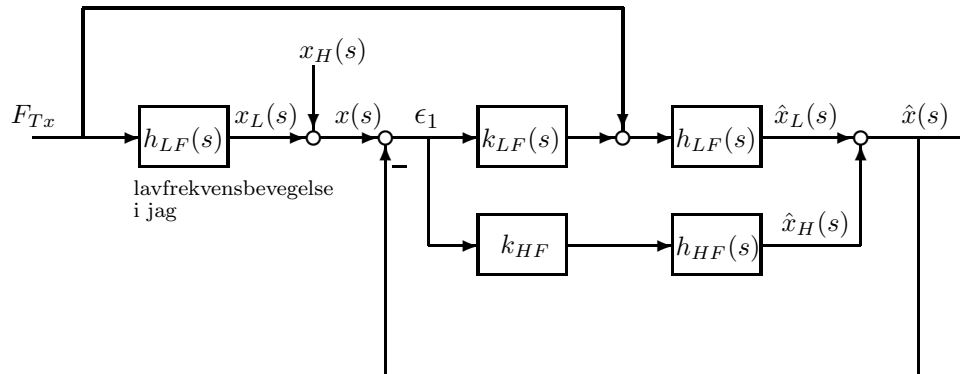
$$x_H = x_{v2} \quad (10.156)$$

⁵Dette delkapittelet er utarbeidet av vit.ass. Erling Aarsand Johannessen

Her er ω_0 oscillatorens frekvens, ζ er dempningen, mens β_1 er en amplitudeparameter. Skipets totale bevegelse er gitt av

$$x(t) = x_L(t) + x_H(t) \quad (10.157)$$

Bølgefilteret kan da settes inn i filterstrukturen i figur 10.22 som vist i figur 10.24.



Figur 10.24: Bølgefilter for jag

Vi må nå bestemme transferfunksjonen $k_{LF}(s)$ og forsterkningen k_{HF} . Av ligningene (10.152) og (10.153) ser vi at graden i nevner for $h_{LF}(s)$ er $n_{LF} = 2$, og at graden i teller er $n_{LF}^{teller} = 0$. Vi velger nå

$$k_{LF}(s) = \frac{c_0^{LF} + c_1^{LF}s}{b_0^{LF}} \quad (10.158)$$

som gir

$$k_{LF}(s)h_{LF}(s) = \frac{c_0^{LF} + c_1^{LF}s}{b_0^{LF}} \frac{1}{m_x s^2} = \frac{c_0^{LF} + c_1^{LF}s}{s^2} \quad (10.159)$$

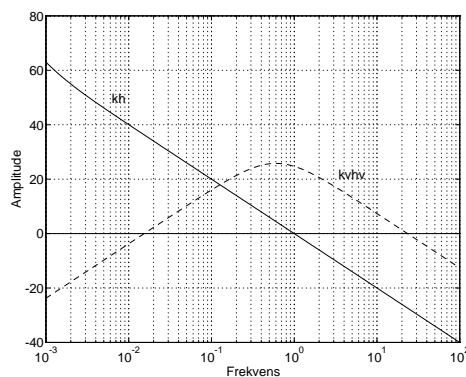
Her er $b_0^{LF} = 1/m_x$ og

$$k_{HF}h_{HF}(s) = \frac{\beta_1 s}{1 + \frac{2\zeta s}{\omega_0} + \left(\frac{s}{\omega_0}\right)^2} \quad (10.160)$$

Vi ser nå på et konkret talleksempel, og velger et skip med treghet $m_x = 5 \cdot 10^6$ kg i langskipsretningen. Lavfrekvensgrenen inneholder to designparametre, c_0^{LF} og c_1^{LF} . Forsterkningen i denne grenen kan justeres ved å variere c_0^{LF} , mens plasseringen av nullpunktet $s = -\frac{c_0^{LF}}{c_1^{LF}}$ bestemmes av c_1^{LF} . Nullpunktet bør legges inn ved høyest mulig frekvens, slik at $k_{LF}(s)h_{LF}(s)$ faller av med stigningstall -2 til høyest mulig frekvens. På denne måten oppfylles best kravet om at $k_v h_v \gg kh$. På den annen side vil plasseringen av nullpunktet begrenses av kravet om at filteret skal være stabilt. I høyfrekvensgrenen velger vi parametrene $\zeta = 1$ og $\omega_0 = 2\pi/10 \approx 0.6$ rad/s, som tilsvarer en periode på 10 s. Videre settes $\beta_1 = 65 \approx 36$ dB og $c_0^{LF} = 0.0005 \approx -66$ dB. Nullpunktet legges inn ved $\omega_z = 0.001$ rad/s, som svarer til $c_1^{LF} = 0.5$.

Figur 10.25 viser frekvensresponsene til lavfrekvensgrenen $k_{LF}h_{LF}$ (heltrukket linje) og høyfrekvensgrenen $k_{HF}h_{HF}$ (stiplet linje). Transferfunksjonene $\frac{\hat{x}_L}{x}(s)$ og $\frac{\hat{x}_H}{x}(s)$ er interessante. Disse viser hvordan frekvensdelingen skjer mellom de to grenene. Vi har

$$\frac{\hat{x}_L}{x}(s) = \frac{k_{LF}(s)h_{LF}(s)}{1 + g_0(s)} \quad (10.161)$$

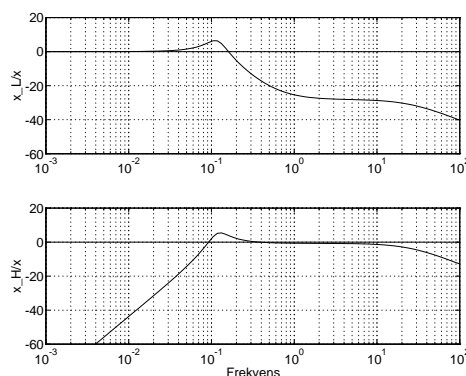


Figur 10.25: Frekvensrespons for bølgefilteret

og

$$\frac{\hat{x}_H}{x}(s) = \frac{k_{HF}h_{HF}(s)}{1 + g_0(s)} \quad (10.162)$$

Frekvensresponsen til disse transferfunksjonene er vist i figur 10.26. Her ser vi at filteret fungerer etter hensikten ved at støyens innvirkning på x_L er redusert med 25 dB i frekvensområdet 1–10 rad/s. Ved tilbakekobling fra \hat{x}_L vil da pådraget ikke være sensitivt for høyfrekvent bølgebevegelse, og thrustermodulasjon unngås.

Figur 10.26: Frekvensresponsene $\frac{\hat{x}_L}{x}(j\omega)$ og $\frac{\hat{x}_H}{x}(j\omega)$

Kapittel 11

Algoritmer i diskret tid

11.1 Simulering

Simulering er mye bruk i forbindelse med regulatorutvikling. I dette kapitlet presenteres integrasjonsmetoder i diskret tid for simulering av servosystemer.

Gitt et system

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{v}(t), t) \quad (11.1)$$

hvor \mathbf{x} er tilstandsvektoren og \mathbf{v} er en vektor av signaler som er uavhengig av \mathbf{x} . Dette kan være referanser, foroverkoblinger eller forstyrrelser. Eventuelle pådrag \mathbf{u} generert ved tilbakekobling behandles på følgende måte: Gitt systemet

$$\dot{\mathbf{x}} = \tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{x}, \mathbf{u}(\mathbf{x}), \mathbf{v}, t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{v}(t), t) \quad (11.2)$$

som overfører systemet til formen i lign. (11.1). Systemet skal diskretiseres med tidskritt h . $\mathbf{x}(k)$ betegner $\mathbf{x}(t = kh)$.

11.1.1 Eulers metode

Eulers metode for integrasjon av systemet gitt av lign. (11.1) gir

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{x}(k) + h\mathbf{f}(\mathbf{x}(k), \mathbf{v}(k), k) \quad (11.3)$$

For simulering av enkle systemer hvor krav til nøyaktighet er moderat, kan denne metoden være akseptabel. Metoden er av første orden med lokal avbruddsfeil proporsjonal med h^2 .

Eulers metode må ikke brukes for systemer med komplekskonjugerte poler med liten demping. Grunnen til dette er at løsningen bare er stabil for systemer med poler innenfor sirkelen $|1 + hs| = 1$ i s -planet (fig. 11.1).

Typiske systemer med liten demping er hydrauliske motorer med transferfunksjon på formen

$$h(s) = K \frac{1}{s(1 + 2\zeta h \frac{s}{\omega_h} + \frac{s^2}{\omega_h^2})} \quad (11.4)$$

og systemer med elastisitet i lasten med transferfunksjon som kan være av formen

$$h(s) = K \frac{1 + 2Z \frac{s}{\Omega} + \frac{s^2}{\Omega^2}}{1 + 2\zeta \frac{s}{\omega} + \frac{s^2}{\omega^2}} \quad (11.5)$$

Figur 11.1: Stabilitetsområde for $h\lambda$ i s -planet for Eulers metode hvor λ er en egenverdi til det kontinuerte systemet.

eller

$$h(s) = K \frac{1}{1 + 2\zeta \frac{s}{\omega} + \frac{s^2}{\omega^2}} \quad (11.6)$$

Eksempel 11.1 Gitt systemet

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (11.7)$$

$$\dot{x}_2 = -\omega_0^2 x_1 - 2\zeta \omega_0 x_2 + v \quad (11.8)$$

som har transferfunksjonen

$$\frac{x_1}{v}(s) = \frac{1}{s^2 + 2\zeta \omega_0 s + \omega_0^2} \quad (11.9)$$

Når $\zeta = 0$ har systemet poler for $s = \pm j\omega_0$.

Eulers metode gir

$$x_1(k+1) = x_1(k) + hx_2(k) \quad (11.10)$$

$$x_2(k+1) = x_2(k) + h[-\omega_0^2 x_1(k) - 2\zeta \omega_0 x_2(k) + v(k)] \quad (11.11)$$

I z -planet (se f.eks. [29]) fås

$$zx_1 = x_1 + hx_2 \quad (11.12)$$

$$zx_2 = x_2 + h[-\omega_0^2 x_1 - 2\zeta \omega_0 x_2 + v] \quad (11.13)$$

Anta at $\zeta = 0$. Ved å løse ut x_2 fra lign. (11.12) og sette inn i lign. (11.13) finnes transferfunksjonen

$$\frac{x_1}{v}(z) = \frac{h^2}{z^2 - 2z + 1 + h^2 \omega_0^2} \quad (11.14)$$

som har poler i $z = 1 \pm jh\omega_0$. Polene til det diskretiserte systemet ligger altså utenfor enhetssirkelen for alle h , og det diskretiserte systemet er derfor alltid ustabil selv om

det opprinnelige kontinuerlige systemet er stabilt med poler på den imaginære akse. Med en liten og positiv verdi for ζ er det kontinuerlige systemet asymptotisk stabil, mens det diskretiserte systemet vil ha mindre demping, og kan være ustabil selv om det benyttes svært små tidskritt h .

Eulers metode er derfor uegnet for denne type system. En kombinasjon av Eulers metode og Eulers bakovermetode som presenteres i kapittel 11.1.2 kan imidlertid brukes. ■

11.1.2 Eulers metode for andreordens systemer

For et andreordens system

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (11.15)$$

$$\dot{x}_2 = f(x_1, x_2, v) \quad (11.16)$$

defineres Eulers metode ofte ved at akselerasjon \dot{x}_2 er konstant over diskretiseringsintervallet. Dette gir

$$x_1(k+1) = x_1(k) + hx_2(k) + \frac{h^2}{2}f(x_1(k), x_2(k), v(k), k) \quad (11.17)$$

$$x_2(k+1) = x_2(k) + hf(x_1(k), x_2(k), v(k), k) \quad (11.18)$$

Resultatet blir litt mer nøyaktig med denne formuleringen, men stabilitetsegenskapene endres bare i liten grad. Denne metode presenteres også i [21], hvor den forøvrig ikke er gitt noe spesielt navn. Metoden utledes ved Taylorrekkeutvikling opp til $\ddot{x}_1 = \dot{x}_2$:

$$x_1(k+1) = x_1(k) + h\dot{x}_1(k) + \frac{h}{2}\ddot{x}_1(k) \quad (11.19)$$

$$x_2(k+1) = x_2(k) + h\dot{x}_2(k) \quad (11.20)$$

Innsetting av $\dot{x}_1 = x_2$ og $\ddot{x}_1 = \dot{x}_2 = f$ gir metoden i lign. (11.17) og (11.18).

Eksempel 11.2 For systemet

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (11.21)$$

$$\dot{x}_2 = -\omega_0^2 x_1 - 2\zeta\omega_0 x_2 + v \quad (11.22)$$

gir denne metoden algoritmen

$$x_1(k+1) = x_1(k) + hx_2(k) + \frac{h^2}{2}[-\omega_0^2 x_1(k) - 2\zeta\omega_0 x_2(k) + v(k)] \quad (11.23)$$

$$x_2(k+1) = x_2(k) + h[-\omega_0^2 x_1(k) - 2\zeta\omega_0 x_2(k) + v(k)] \quad (11.24)$$

Med $\zeta = 0$ blir den karakteristiske ligningen

$$z^2 + \left(\frac{h^2\omega_0^2}{2} + h2\zeta\omega_0 - 2\right)z + 1 + \frac{h^2\omega_0^2}{2} - h\zeta\omega_0 = 0 \quad (11.25)$$

Med $\zeta = 0$ blir polene

$$z_{1,2} = 1 - \frac{h^2\omega_0^2}{4} \pm j\sqrt{h^2\omega_0^2 - \left(\frac{h^2\omega_0^2}{2}\right)^2} \quad (11.26)$$

Polene ligger utenfor enhetssirkelen siden

$$z_1 z_2 = 1 + \frac{h^2 \omega_0^2}{2} > 1 \quad (11.27)$$

De ligger imidlertid til venstre for linjen $\operatorname{Re}\{z\} = 1$ hvor polene befant seg for den vanlige Eulers metode. Metoden ser ut til å ha et noe større stabilitetsområde enn den vanlige Eulers metode som gitt av lign. (11.3), men den er altså ustabil for poler på den imaginære akse og for poler med liten demping. ■

En interessant metode er å bruke en kombinasjon av Eulers metode med Eulers bakovermetode. Eulers bakovermetode gir

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{x}(k) + h\mathbf{f}(\mathbf{x}(k+1), \mathbf{v}(k+1), k+1) \quad (11.28)$$

Dette er en implisitt metode som er stabil for systemer med poler innenfor sirkelen $|hs - 1| = 1$ i s -planet. Eulers bakovermetode er derfor stabil for systemer som ikke har poler i høyre halvplan.

En god metode av første orden (orden av en integrasjonsmetode er definert i f.eks. [21]) for andreordens systemer er å bruke vanlig Euler for hastighetsligningen og Eulers bakovermetode for posisjonsligningen. Dette gir en beregningsalgoritme hvor problemer med implisitte ligninger unngås. Algoritmen er

$$\mathbf{x}_2(k+1) = \mathbf{x}_2(k) + h\mathbf{f}(\mathbf{x}_1(k), \mathbf{x}_2(k), \mathbf{v}(k), k) \quad (11.29)$$

$$\mathbf{x}_1(k+1) = \mathbf{x}_1(k) + h\mathbf{x}_2(k+1) \quad (11.30)$$

Her kan lign. (11.30) sies å være på implisitt form siden $\mathbf{x}_2(k+1)$ opptrer på høyre side i ligningen. Dette er imidlertid ikke noe problem siden $\mathbf{x}_2(k+1)$ allerede er beregnet fra lign. (11.29). Metodens nøyaktighet er begrenset siden den er av første orden.

Eksempel 11.3 For systemet

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (11.31)$$

$$\dot{x}_2 = -\omega_0^2 x_1 - 2\zeta\omega_0 x_2 + v \quad (11.32)$$

gir denne metoden algoritmen

Algoritme 11.1

$$x_2(k+1) = x_2(k) + h[-\omega_0^2 x_1(k) - 2\zeta\omega_0 x_2(k) + v(k)] \quad (11.33)$$

$$x_1(k+1) = x_1(k) + hx_2(k+1) \quad (11.34)$$

■

Algoritmen krever fire addisjoner og fire multiplikasjoner for hvert tidsskritt hvis koeffisientene trekkes sammen ved initialisering. Den z -transformerte modellen er

$$zx_1(z) = x_1(z) + hx_2(z) \quad (11.35)$$

$$zx_2(z) = x_2(z) - h2\zeta\omega_0 x_2(z) - h\omega_0^2 x_1(z) + hv(z) \quad (11.36)$$

Ved å eliminere $x_2(z)$ fås

$$[z^2 + (h2\zeta\omega_0 + h^2\omega_0^2 - 2)z + 1 - h2\zeta\omega_0]x(z) = v(z) \quad (11.37)$$

Den karakteristiske ligningen har røtter z_1 og z_2 . Dette kan skrives

$$z^2 + (h2\zeta\omega_0 + h^2\omega_0^2 - 2)z + 1 - h2\zeta\omega_0 = (z - z_1)(z - z_2) = z^2 - (z_1 + z_2)z + z_1z_2 \quad (11.38)$$

Ved sammenligning av koeffisientene i ligningen er det klart at

$$z_1z_2 = 1 - h2\zeta\omega_0 \quad (11.39)$$

Anta at systemet har null demping, hvilket betyr at $\zeta = 0$. Da er $z_1z_2 = 1$, og hvis røttene er komplekskonjugerte, så ligger de på enhetssirkelen. Røttene er gitt av

$$z = 1 - \frac{h^2\omega_0^2}{2} \pm h\omega_0\sqrt{\frac{h^2\omega_0^2}{4} - 1} \quad (11.40)$$

som gir komplekskonjugerte røtter for $h < 2/\omega_0$.

Konklusjon: Anta at systemet gitt av lign. (11.31) og (11.32) har null demping og følgelig to poler på den imaginære akse i s -planet. Anta videre at

$$h < \frac{2}{\omega_0} \quad (11.41)$$

Ved bruk av Eulers metode på hastighetsligningen og Eulers bakovermetode på posisjonsligningen, vil det diskretiserte systemet gitt av lign. (11.31) og (11.32) ha poler på enhetssirkelen i z -planet. Det diskretiserte systemet har derfor i likhet med det kontinuerlige systemet null demping.

Stabilitetsområdet for diskrete systemer kan finnes med Jurys kriterium ([15] s. 39) som er et algebraisk stabilitetskriterium. Ifølge dette kriteriet har en andreordens prosess med karakteristisk ligning

$$z^2 + a_1z + a_2 = 0 \quad (11.42)$$

stabilitetsområde med hensyn på a_1 og a_2 gitt av

$$|a_2| < 1 \quad (11.43)$$

$$a_2 + 1 > -a_1 \quad (11.44)$$

og

$$a_2 + 1 > a_1 \quad (11.45)$$

Her er $a_1 = h2\zeta\omega_0 + h^2\omega_0^2 - 2$ og $a_2 = 1 - h2\zeta\omega_0$. Hvis de trivielle forutsetningene $\omega_0 \geq 0$, $h \geq 0$ og $\zeta \geq 0$ er oppfylt, gir lign. (11.45) den mest restriktive ulikheten, som er

$$h^2\omega_0^2 + 4\zeta h\omega_0 - 4 < 0 \quad (11.46)$$

Dette gir formelen for grensen til stabilitetsområdet som skrives

$$h\omega_0 = -2\zeta + \sqrt{(2\zeta)^2 - 4} \quad (11.47)$$

Stabilitetsområdet for et andreordens system er vist i figur 11.2. ■

Figur 11.2: *Stabilitetsområde for $h\lambda$ i s -planet for andreordens system diskretisert med en kombinasjon av Eulers metode og Eulers bakovermetode.*
 λ er en av egenverdiene til det kontinuerlige systemet.

11.1.3 Trapesmetoden

Trapecmetoden er en implisitt metode som gir det diskrete systemet

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{x}(k) + \frac{h}{2} [\mathbf{f}(\mathbf{x}(k), \mathbf{v}(k), k) + \mathbf{f}(\mathbf{x}(k+1), \mathbf{v}(k+1), k+1)] \quad (11.48)$$

for systemet gitt av lign. (11.1).

Anta at

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) = \mathbf{A}\mathbf{x} \quad (11.49)$$

hvilket vil si at systemet er lineært.

Det er interessant å merke seg at ved innføring av $\mathbf{x}(k) = z^{-1}\mathbf{x}(k+1)$, kan trapesmetoden skrives

$$\frac{2}{h} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \mathbf{x}(z) = \mathbf{A}\mathbf{x}(z) \quad (11.50)$$

Transformasjonen fra formuleringen $s\mathbf{x}(s) = \mathbf{A}\mathbf{x}(s)$ i s -planet til formuleringen i z -plan skjer altså ved å bruke

$$s = \frac{2}{h} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \quad (11.51)$$

som er identisk med den bilineære tilnærming som brukes ved regulatordesign i q -planet [3]. Denne transformasjonen avbilder den imaginære akse i s -planet til enhets sirkelen i z -planet. Som et eksempel gir $s = j\omega_0$

$$j\omega_0 = \frac{2}{h} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \quad (11.52)$$

$$\begin{aligned}
& \Downarrow \\
z &= \frac{j\omega_0 - \frac{2}{h}}{j\omega_0 + \frac{2}{h}} \\
& \Downarrow \\
& |z| = 1
\end{aligned} \tag{11.53}$$

som betyr at polen ligger på enhetssirkelen.

Trapesmetoden er velegnet for å simulere lineære andreordens systemer som er gitt på formen

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{F} \tag{11.54}$$

hvor \mathbf{M} er symmetrisk og positiv definitt og av dimensjon $n \times n$, og \mathbf{D} og \mathbf{K} er symmetriske og positiv semidefinitte matriser av dimensjon $n \times n$. \mathbf{x} er en n -dimensjonal posisjonsvektor, og \mathbf{F} er en n -dimensjonal vektor som er uavhengig av \mathbf{x} . Systemet kan være et masse-fjær-demper system med massematrise \mathbf{M} , dempematrise \mathbf{D} og fjærkonstantmatrise \mathbf{K} . Det kan også være et dobbeltintegratorsystem

$$\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{u} + \mathbf{F} \tag{11.55}$$

med regulator

$$\mathbf{u} = -\mathbf{D}\dot{\mathbf{x}} - \mathbf{K}\mathbf{x} \tag{11.56}$$

Det kan innvendes at dette er en meget snever klasse av systemer, men denne type systemer er meget viktige i vibrasjonsanalyse og i enkle motor-fjær-demper systemer. Det er en meget viktig egenskap ved trapesmetoden at den ikke introduserer positiv eller negativ demping i systemet ved diskretisering. Metoden er derfor spesielt egnet for systemer med liten eller null demping. Trapesmetoden er forøvrig et spesialtilfelle av metodene Newmark β og Wilson θ som er mye brukt i vibrasjonsanalyse [31].

Trapesmetoden for systemet kan skrives på vanlig tilstandsromform

$$\mathbf{x}_1(k+1) = \mathbf{x}_1(k) + \frac{h}{2}[\mathbf{x}_2(k) + \mathbf{x}_2(k+1)] \tag{11.57}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_2(k+1) &= \mathbf{x}_2(k) + \frac{h}{2}\mathbf{M}^{-1}[-\mathbf{D}(\mathbf{x}_2(k) + \mathbf{x}_2(k+1)) \\
&\quad - \mathbf{K}(\mathbf{x}_1(k) + \mathbf{x}_1(k+1)) + \mathbf{F}(k) + \mathbf{F}(k+1)]
\end{aligned} \tag{11.58}$$

hvor $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}$ og $\mathbf{x}_2 = \dot{\mathbf{x}}$. Metoden kan overføres til eksplisitt form ved å løse ut $\mathbf{x}_1(k+1)$ og $\mathbf{x}_2(k+1)$. Denne formuleringen er imidlertid ikke den beste for dette systemet.

En mer hensiktsmessig formulering oppnås ved å ta utgangspunkt i den andreordens ligningen. Hastighetsligningen skrives

$$\dot{\mathbf{x}}(k+1) = \dot{\mathbf{x}}(k) + \frac{h}{2}(\ddot{\mathbf{x}}(k) + \ddot{\mathbf{x}}(k+1)) \tag{11.59}$$

mens posisjonsligningen skrives

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{x}(k) + \frac{h}{2}(\dot{\mathbf{x}}(k) + \dot{\mathbf{x}}(k+1)) \tag{11.60}$$

Innsetting av $\dot{\mathbf{x}}(k+1)$ fra lign. (11.59) gir

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{x}(k) + h\dot{\mathbf{x}}(k) + \left(\frac{h}{2}\right)^2[\ddot{\mathbf{x}}(k) + \ddot{\mathbf{x}}(k+1)] \quad (11.61)$$

Akselerasjonen ved $k+1$ uttrykkes ved systemligningen (11.54):

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(k+1) + \mathbf{D}\dot{\mathbf{x}}(k+1) + \mathbf{K}\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{F}(k+1) \quad (11.62)$$

Innsetting av $\dot{\mathbf{x}}(k+1)$ fra lign. (11.59) gir

$$\left(\mathbf{M} + \frac{h}{2}\mathbf{D}\right)\ddot{\mathbf{x}}(k+1) + \frac{h}{2}\mathbf{D}\ddot{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{D}\dot{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{K}\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{F}(k+1) \quad (11.63)$$

Premultiplisering med $(\mathbf{M} + \frac{h}{2}\mathbf{D})$ i lign. (11.61) og innsetting av lign. (11.63) gir

$$\begin{aligned} \left(\mathbf{M} + \frac{h}{2}\mathbf{D} + \left(\frac{h}{2}\right)^2\mathbf{K}\right)\mathbf{x}(k+1) &= \left(\mathbf{M} + \frac{h}{2}\mathbf{D}\right)\mathbf{x}(k) \\ &+ \left(h\mathbf{M} + \left(\frac{h}{2}\right)^2\mathbf{D}\right)\dot{\mathbf{x}}(k) \\ &+ \left(\frac{h}{2}\right)^2\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(k) + \left(\frac{h}{2}\right)^2\mathbf{F}(k+1) \end{aligned} \quad (11.64)$$

Algoritme 11.2 (Trapezmetoden for systemet $\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{F}$)

1. Anta at initialverdiene $\mathbf{x}(0)$ og $\dot{\mathbf{x}}(0)$ er kjent. Beregn $\ddot{\mathbf{x}}(0)$ ved å løse systemligningen

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(0) + \mathbf{D}\dot{\mathbf{x}}(0) + \mathbf{K}\mathbf{x}(0) = \mathbf{F}(0) \quad (11.65)$$

Løsning ved bruk av Gausseliminering er omlag dobbelt så raskt som ved bruk av $\ddot{\mathbf{x}}(0) = \mathbf{M}^{-1}[-\mathbf{D}\dot{\mathbf{x}}(0) - \mathbf{K}\mathbf{x}(0) + \mathbf{F}(0)]$. Siden \mathbf{M} er symmetrisk og positiv definit, gir Cholesky dekomposisjon $\mathbf{M} = \mathbf{C}^T\mathbf{C}$ en raskere og enklere Gausseliminering enn vanlig LU-dekomposisjon $\mathbf{M} = \mathbf{L}\mathbf{U}$. En god referanse er [17] som også inneholder algoritmer på MATLAB-syntaks.

2. Beregn $\mathbf{x}(k+1)$ fra ligning lign. (11.64). Gausseliminering ved Choleskydekomposisjon er den raskeste metoden siden $(\mathbf{M} + \frac{h}{2}\mathbf{D} + (\frac{h}{2})^2\mathbf{K})$ er symmetrisk og positiv definit.
3. Beregn akselerasjon ved å løse lign. (11.61):

$$\ddot{\mathbf{x}}(k+1) = \ddot{\mathbf{x}}(k) + \left(\frac{2}{h}\right)^2[\mathbf{x}(k+1) - \mathbf{x}(k)] - \frac{4}{h}\dot{\mathbf{x}}(k) \quad (11.66)$$

4. Beregn hastigheten ved bruk av lign. (11.59):

$$\dot{\mathbf{x}}(k+1) = \dot{\mathbf{x}}(k) + \frac{h}{2}(\ddot{\mathbf{x}}(k) + \ddot{\mathbf{x}}(k+1)) \quad (11.67)$$



Trapesmetoden er en andreordens metode med lokal avbruddsfeil proporsjonal med h^3 .

Metoden er numerisk stabil for alle systemer med poler i venstre halvplan eller på den imaginære akse. Denne egenskapen betegnes som A-stabilitet.

Eksempel 11.4 For systemet

$$\dot{x}_1 = x_1 \quad (11.68)$$

$$\dot{x}_2 = -\omega_0^2 x_1 - 2\zeta\omega_0 x_2 + v \quad (11.69)$$

gir denne metoden algoritmen

Algoritme 11.3

1. Initialisering:

$$c_0 = \frac{1}{1 + \frac{h}{2}2\zeta\omega_0 + (\frac{h}{2})^2\omega_0^2} \quad (11.70)$$

$$c_1 = c_0(1 + \frac{h}{2}2\zeta\omega_0) \quad (11.71)$$

$$c_2 = c_0(h + (\frac{h}{2})^22\zeta\omega_0) \quad (11.72)$$

$$c_3 = c_0(\frac{h}{2})^2 \quad (11.73)$$

$$c_4 = (\frac{2}{h})^2 \quad (11.74)$$

$$c_5 = \frac{4}{h} \quad (11.75)$$

$$c_6 = \frac{h}{2} \quad (11.76)$$

$$a(0) = -\omega_0^2 x_1(0) - 2\zeta\omega_0 x_2(0) + v(0) \quad (11.77)$$

2. Beregn verdier ved $k + 1$:

$$x_1(k + 1) = c_1 x_1(k) + c_2 x_2(k) + c_3 [a(k) + v(k)] \quad (11.78)$$

$$a(k + 1) = a(k) + c_4 [x_1(k + 1) - x_1(k)] - c_5 x_2(k) \quad (11.79)$$

$$x_2(k + 1) = x_2(k) + c_6 [a(k) + a(k + 1)] \quad (11.80)$$



Algoritmen krever bare åtte addisjoner/subtraksjoner og seks multiplikasjoner for hvert tidsskritt. Dette er dobbelt så mye som algoritme 11.1, men likevel gir metoden lite regning. Trapesmetoden er av andre orden og derfor vesentlig mer nøyaktig enn Eulers metode i kombinasjon med Eulers bakovermetode. Trapesmetoden foretrekkes derfor for lineære systemer.

Metoden er A-stabil, slik at lange tidsskritt gir ikke ustabilitet. Vær oppmerksom på at hvis dynamikk med frekvens opp til en frekvens ω_{\max} skal studeres, må tidsskrittet være begrenset av anslagsvis $h < 1/(5\omega_{\max})$ for at resultatet skal bli nøyaktig. Hvis det er raskere svingninger over denne frekvens, vil metoden ikke bli ustabil, men den kan være unøyaktig.



11.1.4 Fjerdeordens Runge-Kutta metode

Fjerdeordens Runge-Kutta metode (RK4) er en god metode som har god nøyaktighet og stort stabilitetsområde. Metoden er eksplisitt og enkel å programmere.

Gitt systemet

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) \quad (11.81)$$

Algoritme 11.4 (RK4)

$$\mathbf{k}_1 = h\mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{v}(t), t) \quad (11.82)$$

$$\mathbf{k}_2 = h\mathbf{f}\left(\mathbf{x}(t) + \frac{1}{2}\mathbf{k}_1, \mathbf{v}\left(t + \frac{1}{2}h\right), t + \frac{1}{2}h\right) \quad (11.83)$$

$$\mathbf{k}_3 = h\mathbf{f}\left(\mathbf{x}(t) + \frac{1}{2}\mathbf{k}_2, \mathbf{v}\left(t + \frac{1}{2}h\right), t + \frac{1}{2}h\right) \quad (11.84)$$

$$\mathbf{k}_4 = h\mathbf{f}(\mathbf{x}(t) + \mathbf{k}_3, \mathbf{v}(t + h), t + h) \quad (11.85)$$

$$\mathbf{x}(t + h) = \mathbf{x}(t) + \frac{1}{6}(\mathbf{k}_1 + 2\mathbf{k}_2 + 2\mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4) \quad (11.86)$$

■

Metoden er av fjerde orden med lokal avbruddsfeil proporsjonal med h^5 .

Stabilitetsområdet i s -planet er litt større enn for Eulers metode. Stabilitetsområdet inkluderer imidlertid også poler på den imaginære akse for frekvenser opp til $2.8/h$. Dette er vist i fig. 11.3 hvor også stabilitetsområdet til Runge-Kutta femteordens metode (RK5) er vist. Til sammenligning er stabilitetsområdet til Runge-Kutta andre- og tredjeordens metoder vist i figur 11.4.

I CYPROS og MATLAB inngår ferdige moduler med Runge-Kutta metoder for simulering. Disse modulene har variabel skrittlengde som gir en spesifisert nøyaktighet. I CYPROS brukes Runge-Kutta-Merson, mens i MATLAB brukes Runge-Kutta-Fehlberg. I MATLAB gir ODE23 en kombinasjon av andre og tredjeordens Runge-Kutta med variabel skrittlengde. Høyere nøyaktighet oppnås med ODE45 som benytter en kombinasjon av RK4 og RK5.

Eksempel 11.5 En ventilstyrt hydraulisk motor med transferfunksjon

$$h(s) = K \frac{1}{s(1 + 2\zeta_h \frac{s}{\omega_h} + \frac{s^2}{\omega_h^2})} \quad (11.87)$$

vil vanligvis ha liten damping. RK4 egner seg godt til simulering av denne type prosess.

Hvis motoren simuleres med Eulers metode, kan simuleringsmodellen bli ustabil selv for en liten skrittlengde. I beste fall vil de simulerte svingningene bli unøyaktige. Eulers metode kan imidlertid brukes hvis prosessen reguleres med gode stabilitetsmarginer, og beskrives med den forenklede modellen

$$h(s) = \frac{K}{s} \quad (11.88)$$

■

Figur 11.3: *Stabilitetsområde for $h\lambda$ i s -planet for RK4 og RK5 hvor λ er en egenverdi til det kontinuerte systemet. RK5 har det største området.*

11.1.5 Konklusjon

Som hovedregel kan man bruke en fjerdeordens Runge-Kutta metode for simulering. Metoden er enkel å programmere, og beregningsbehovet er moderat. I tillegg virker den bra for systemer med liten eller null demping. Runge-Kutta metoder med variabel skrittlengde inngår som modul i mange programsystemer som f.eks. CYPROS og MATLAB. Det vil ofte være hensiktsmessig å bruke disse programsystemene.

Eulers metode kan være interessant å bruke når regnekraften tilsier at en lite regnekrevende metode må brukes. På mange systemer må imidlertid Eulers metode kjøres med så liten skrittlengde at det er raskere å bruke RK4 med en lengre skrittlengde. Eulers metode er ustabil for oscillatoriske systemer med liten demping. Hvis polene er på den imaginære akse er alltid Eulers metode ustabil.

For oscillatoriske systemer kan RK4 benyttes. For lineære andreordens systemer med liten demping er trapesmetoden egnet. Metoden er A-stabil og av andre orden, den er lite regnekrevende og gir riktig demping i det diskretiserte systemt. En kombinasjon av Eulers metode og Eulers bakovermetode kan brukes for lineære og ulineære andreordens systemer med liten demping. Metoden er ikke så nøyaktig som trapesmetoden, men gir en løsning som er stabil for systemer uten poler i høyre halvplan for tilstrekkelig korte tidsskritt.

Figur 11.4: *Stabilitetsområde for $h\lambda$ i s -planet for RK2 og RK3 hvor λ er en egenverdi til det kontinuerlige systemet. RK3 har det største området.*

11.2 Regulatoralgoritmer

11.2.1 Innledning

I servoteknikken er prosessene beskrevet i kontinuerlig tid, og det er mange gode teknikker for analyse og regulatordesign i s -planet og i tidsplanet. Ofte skal imidlertid regulatoren implementeres på en digital prosessor. I det følgende presenteres teknikker for digital implementering av regulatorer beskrevet på kontinuerlig form. Det er også mulig å utvikle regulatoralgoritmer direkte i diskret tid ved bruk av teknikker basert på f.eks. z -plananalyse. Analyse i kontinuerlig tid ved bruk av s -plan (eller q -plan når innvirkningen av tastefrekvensen er signifikant) gir imidlertid bedre innsikt i systemets dynamikk, og er vanligvis å foretrekke.

11.2.2 Diskretisering av transferfunksjoner

En enkel teknikk for konvertering av en regulator på transferfunksjonsform presenteres i dette kapitlet. Anta at en regulator $h(s)$ er utviklet basert på frekvensanalyse eller den mer nøyaktige q -transformasjonen [3]. Denne regulatoren kan konverteres til diskret tid ved å sette inn

$$s = \frac{2}{T} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \quad (11.89)$$

hvor T er tastetiden¹.

¹På engelsk brukes verbet *to sample* som betyr 'å prøve en utvalgt verdi'. På tysk brukes *zu tasten* som betyr 'å føle'. På norsk er punktprøving lansert, men neppe brukt. Her brukes 'tasting' som

En PD-regulator

$$h(s) = K \frac{1 + T_d s}{1 + T_f s} \quad (11.90)$$

er gitt. Det forutsettes at $T_d > T_f > T/2$. Transferfunksjonen transformeres til

$$h(z) = K \frac{1 + z^{-1} + T_d \frac{2}{T} (1 - z^{-1})}{1 + z^{-1} + T_f \frac{2}{T} (1 - z^{-1})} = K \frac{\frac{2T_d}{T} + 1 - (\frac{2T_d}{T} - 1)z^{-1}}{\frac{2T_f}{T} + 1 - (\frac{2T_f}{T} - 1)z^{-1}} \quad (11.91)$$

Pådraget er gitt av

$$u(s) = h(s)e(s) \quad (11.92)$$

i s -planet. Tilsvarende sammenheng i z -planet er

$$u(z) = h(z)e(z) \quad (11.93)$$

Transformasjonen til diskret tid utføres ved å sette inn $u(k)$ for $u(z)$ og $e(k)$ for $e(z)$ og oppfatte z^{-1} som tidsskiftoperatoren definert ved $z^{-1}r(k) = r(k-1)$ for et vilkårlig signal $r(k)$. Dette gir

$$u(k) = \frac{1}{\frac{2T_f}{T} + 1} \left[-\left(\frac{2T_f}{T} - 1\right)u(k-1) + K\left(\frac{2T_d}{T} + 1\right)e(k) - K\left(\frac{2T_d}{T} - 1\right)e(k-1) \right] \quad (11.94)$$

Algoritme 11.5 (Regulatoralgoritme for en PD-regulator)

$$u(k) = c_1 u(k-1) + c_2 e(k) + c_3 e(k-1) \quad (11.95)$$

hvor

$$c_1 = -\frac{\frac{2T_f}{T} - 1}{\frac{2T_f}{T} + 1} \quad (11.96)$$

$$c_2 = K \frac{\frac{2T_d}{T} + 1}{\frac{2T_f}{T} + 1} \quad (11.97)$$

$$c_3 = -K \frac{\frac{2T_d}{T} - 1}{\frac{2T_f}{T} + 1} \quad (11.98)$$

■

Det er fornuftig å beregne konstantene c_1 , c_2 og c_3 ved initialiseringen av regulatorprogrammet.

En PID-regulator skrives vanligvis

$$h(s) = K \frac{1 + T_i s}{T_i s} \frac{1 + T_d s}{1 + T_f s} \quad (11.99)$$

for bruk ved analyse i Bodediagram. Vanligvis er $T_d \ll T_i$, og da vil tilnærmelsen

$$h(s) = K \frac{1 + T_d s}{1 + T_f s} + K \frac{1}{T_i s} \quad (11.100)$$

passer bedre i norsk språk enn 'sampling'.

være oppfylt. Denne formuleringen egner seg til implementering i diskret tid. Ved bruk av den bilineære transformasjon blir integralleddet

$$K \frac{1}{T_i} \frac{1}{\frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}} = K \frac{1+z^{-1}}{\frac{2}{T} T_i (1-z^{-1})} \quad (11.101)$$

Integraldelen av regulatoren gitt av

$$u_I(s) = K \frac{1}{T_i s} e(s) \quad (11.102)$$

blir derfor

$$u_I(k) = u_I(k-1) + \frac{K T}{T_i} \frac{1}{2} [e(k) + e(k-1)] \quad (11.103)$$

Algoritmen for PID-regulatoren blir

$$u(k) = u_{PD}(k) + u_I(k) \quad (11.104)$$

hvor PD-leddet beregnes ved lign. (11.95), og integralleddet beregnes av lign. (11.103).

Fordelen med å dele opp i integralledd og PD-ledd er at integralleddet kan holdes konstant eller lades ut hvis pådraget går i metning.

Algoritme 11.6 (Regulatoralgoritme for PID-regulator)

1. Initialiser $e(0) = 0$, $u_{PD}(0) = 0$ og $u_I(0) = 0$ og konstantene

$$c_1 = -\frac{\frac{2T_f}{T} - 1}{\frac{2T_f}{T} + 1} \quad (11.105)$$

$$c_2 = K \frac{\frac{2T_d}{T} + 1}{\frac{2T_f}{T} + 1} \quad (11.106)$$

$$c_3 = -K \frac{\frac{2T_d}{T} - 1}{\frac{2T_f}{T} + 1} \quad (11.107)$$

$$c_4 = \frac{K T}{T_i} \frac{1}{2} \quad (11.108)$$

2. Beregn

$$u_{PD}(k) = c_1 u_{PD}(k-1) + c_2 e(k) + c_3 e(k-1) \quad (11.109)$$

3. Beregn

$$u_I(k) = u_I(k-1) + c_4 [e(k) + e(k-1)] \quad (11.110)$$

og utfør eventuell korrigerings på beregnet $u_I(k)$ hvis pådraget er i metning.

4. Beregn pådraget

$$u(k) = u_{PD}(k) + u_I(k) \quad (11.111)$$

■

Eksempel 11.6 Ved motorstyring forekommer det at posisjonen måles digitalt med en kodeskive som gir ut et digitalt posisjonssignal. Posisjonssignalet overføres fra en inkrementell kodeskive som et pulstog, og en ekstern teller integrerer opp posisjonen. For en absolutt kodeskive er utgangen et bitmønster som angir absolutt posisjon på kvantisert form.

Vi skal her anta at hastighetsmåling ikke er tilgjengelig, og at en hastighetssløyfe skal implementeres ved bruk av kodeskivemålingen.

Et relevant spørsmål her er om det er fornuftig å ha en hastighetssløyfe når det ikke er noen hastighetsmåling. Det viser seg at ved bruk av likestrømsmotor må posisjonssløyfen vanligvis ha båndbredde som er mindre enn laveste resonansfrekvens i systemet, mens båndbredden i hastighetssløyfen kan være vesentlig høyere. For en hydraulisk servomekanisme er det vanligvis ikke hensiktsmessig med noen hastighetssløyfe.

Det er viktig å være klar over følgende:

1. Hvis hastigheten skal styres nøyaktig, må det komme et visst antall pulser for hvert tasteintervall.
2. Beregning av hastigheten fra pulstøget er en derivasjon av et digitalt signal. Derivasjonen bør være frekvensbegrenset.

Frekvensbegrenset derivasjon av posisjonssignalet utføres ved

$$\hat{v}(s) = \frac{s}{1 + T_f s} y(s) \quad (11.112)$$

hvor y er posisjonsmålingen og \hat{v} er beregnet hastighet v .

Den bilineære tilnærmelsen gir

$$\hat{v}(z) = \frac{\frac{2}{T}(1 - z^{-1})}{1 + z^{-1} + \frac{2T_f}{T}(1 - z^{-1})} y(z) \quad (11.113)$$

som forenkles til

$$\left[\frac{2T_f}{T} + 1 - \left(\frac{2T_f}{T} - 1 \right) z^{-1} \right] \hat{v}(z) = \frac{2}{T} (1 - z^{-1}) y(z) \quad (11.114)$$

som gir den diskrete derivasjonen med frekvensbegrensning:

Algoritme 11.7 (Algoritme for frekvensbegrenset derivasjon)

1. Initialisering:

$$c_1 = \frac{\frac{2T_f}{T} - 1}{\frac{2T_f}{T} + 1} \quad (11.115)$$

$$c_2 = \frac{2}{T} \frac{1}{\frac{2T_f}{T} + 1} \quad (11.116)$$

2. Beregning ved tidspunkt k :

$$\hat{v}(k) = c_1 \hat{v}(k-1) + c_2 [y(k) - y(k-1)] \quad (11.117)$$

Derivasjonens knekkfrekvens $1/T_f$ må være høyere enn kryssfrekvensen til en reguleringsløyfe med tilbakekobling fra \hat{v} .

Hvis filtertiden velges lik $T_f = T/2$, så er $c_1 = 0$, og dette forenkler algoritmen. ■

11.2.3 Tastefrekvens

Anta at tasteintervallet er T . Tastefrekvensen er da

$$f_s = \frac{1}{T} \quad (\text{Hz}) \quad (11.118)$$

eller

$$\omega_s = \frac{2\pi}{T} \quad (\text{rad/s}) \quad (11.119)$$

Nyquistfrekvensen er

$$f_N = \frac{1}{2T} \quad (\text{Hz}) \quad (11.120)$$

eller

$$\omega_N = \frac{\pi}{T} \quad (\text{rad/s}) \quad (11.121)$$

Et signal som tastes må ikke ha signaler med frekvenskomponenter over Nyquistfrekvensen, siden dette gir nedfolding (*aliasing*). Dette er en konsekvens av at ved tasting blir signalets frekvensspektrum periodisk med periode ω_s , slik at hvis signalet har frekvenskomponenter over $\omega_N = \omega_s/2$, oppstår det en overlapping i frekvensspekteret. Dette fører til at frekvenskomponenten ved $\omega_N + \Omega$, $0 < \Omega < \omega_N$, i det kontinuerlige signalet dukker opp ved $\omega_N - \Omega$ i det tastede signalet. Et velkjent eksempel på dette ser man i western-filmer når hjulene på dilligencen tilsynelatende går feil vei. Hvis signalet inneholder støy over Nyquistfrekvensen, må et analogt sugfilter eller lavpassfilter benyttes som anti-nedfoldingsfilter. Dette filteret må ikke gi for stort negativt fasebidrag ved kryssfrekvensen, siden dette vil redusere fasemarginen.

Ved design av diskrete regulatorer kan man se bort fra innvirkning av tastingen hvis tastefrekvensen $2\pi/T$ (rad/s) er 10–30 ganger høyere enn kryssfrekvensen ω_c . Hvis en lavere tastefrekvens er nødvendig, må man analysere innvirkningen av tastingen med q -plananalyse [3] eller ved analyse i z -planet (se f.eks. [22]).

11.3 Digitale regulatorer

11.3.1 Programvare

En digital regulator programmeres vanligvis i programspråket C [19] eller i assembler. C er konsistent og har en standard som overholdes, og dette betyr at programmene kan overføres mellom ulike datasystemer. Det fins gode C-kompilatorer på markedet for alle mikroprosessorer og de fleste digitale signalprosessorer. C er en *de facto* standard for maskin-nær systemprogrammering.

Assembler brukes ennå i spesielle tilfeller. Bruk av assembler fører til høyere utviklingskostnader og vanskeligere vedlikehold. Valg av C eller assembler avhenger av seriestørrelse på produktet, utviklings- og vedlikeholdskostnader og tilgjengelig tid for utvikling. Hvis for eksempel et produkt skal produseres i et stort antall og produktet skal inneholde en enkel digital regulator, kan den beste løsningen være å finne en billig prosessor som oppfyller spesifikasjonene selv om dette medfører dårlige utviklingsomgivelser og endog assemblerprogrammering.

I mange tilfeller er imidlertid utviklingstid viktigere enn kostnader til utvikling og komponenter. Dette gjelder spesielt innen forskning og utvikling, og ved utvikling av store og kostbare systemer i små serier. For denne type systemer er det viktig å bruke gode programmeringsspråk som C eller C++.

11.3.2 Programstruktur

Vi skal her se på programstrukturen for en digital regulator som styrer en fysisk prosess.

En digital regulator kan realiseres med følgende moduler:

- **Initialisering:**

1. Opplasting av program
2. Initialisering av prosessor og operativsystem/monitor
3. Initialiseringsprogram for initialisering av variable og beregning av konstanter som inngår som parametere i regulatorprogrammet.

- **Avbruddsprogram:** Aktivitet med høy prioritet. Startes med klokkeavbrudd.

1. Les målinger
2. Beregn pådrag
3. Skriv ut pådrag
4. Logging av variable
5. Utfør eventuell beregning av referansen i neste tastetidspunkt eller oppdatering av regulatorparametere.

- **Kommunikasjonsprogram:** Aktivitet med lav prioritet.

1. Utskrift til skjerm
2. Innlesing fra tastatur
3. Endring av regulatormodus og regulatorparametere styrt av operatør
4. Reinitialisering av variable og parametere.

Kommunikasjonsprogrammet kan kommunisere med avbruddsprogrammet over et felles dataområde (globale variable i C). På den måten kan målinger og pådrag i avbruddsprogrammet skrives ut til skjerm, og regulatorparametere og regulatormodus endres fra tastatur.

Det kreves bare et enkelt operativsystem eller en monitor for å implementere denne type system. Følgende kreves:

1. Mulighet for klokkeavbrudd
2. Mulighet for innlasting av program
3. Enkle inn/ut-rutiner

Kommersielt tilgjengelige operativsystemer er ikke nødvendigvis egnet for implementering av regulatorer. Typiske problemer kan være at det er vanskelig å generere et pålitelig klokkeavbrudd, og at kommunikasjonsprotokollene er for kompliserte til å utføre rask innlesing av målinger og utskrift av pådrag.

11.3.3 Digitale prosessorer

Vanlige mikroprosessorer som Motorola 68020/68881, 68030/68882 og 68040 og Intel 286/287, 386/387 og 486 har en regnekapasitet fra 0.1 til over 1 Mflops hvor flops står for flytetallsoperasjoner pr. sekund. Disse prosessorene har en praktisk tastetid ned til 1–10 ms som gir en tastefrekvens på 100–1000 Hz.

Eksempel 11.7 En Motorola 68020/68881 med 16.7 MHz klokkefrekvens har vært brukt på Robotlaboratoriet ved Institutt for teknisk kybernetikk. Denne prosessoren har en tastefrekvens på 100 Hz, og har vært kjørt med opp til 1000 flytetallsoperasjoner pr. tasteintervall. Dette svarer til 0.1 Mflops. Programmene er utviklet i C. Prosessoren styrer en hydraulisk robot hvor posisjonsregulatoren er programmert på prosessoren. Systemet har en kryssfrekvens på $f_c = 3$ Hz ($\omega_c = 18.8$ rad/s) og en tastefrekvens $f_s = 100$ Hz. Kryssfrekvensen er dermed en faktor 30 lavere enn tastefrekvensen, og det er ikke nødvendig å ta hensyn til tastefenomener ved regulatordesign. ■

Langsommere systemer med tastetid omkring 1 s kan styres med små prosessorer som Motorola 6809, Intel 8086 eller Z80. Disse prosessorene programmeres gjerne i heltall.

For systemer med tastefrekvens over 1 kHz kan digitale signalprosessorer (DSP) brukes. Disse prosessorene har redusert instruksjonssett, men har til gjengjeld pipelining for matriseoperasjoner og spesialarkitektur for aritmetikk. Digitale signalprosessorer programmeres ofte i heltallsaritmetikk, som nødvendiggjør skalering. Dette gjelder f.eks. TI TMS 320C20 og ADSP-2101. Nye DSPer som TI TMS 320C30 og Motorola DSP96002 har imidlertid mulighet for flytetallsberegninger. Maksimal regnekapasitet for både heltall- og flytetall-DSP ved full utnyttelse av pipelining er omkring 100 Mflops, mens praktisk regnekapasitet kan være fra 5–50 Mflops avhengig av hvilken type beregninger som skal utføres. Disse prosessorene kan også programmeres i C, men ytelsen kan reduseres betraktelig ved bruk av C i stedet for assembler.

Motorstyring av høy kvalitet krever vanligvis et tasteintervall på :

- Hastighetssløyfen: 1 ms eller raskere for å oppnå tilstrekkelig akselerasjonskonstant og dermed demping av støy.
- Posisjonssløyfen: 1 ms eller raskere. Det er også mulig med tasteintervall opp til 10 ms hvis systemet har en god hastighetssløyfe, og hastighetsreferansen interpoleres mellom tastetidspunktene i posisjonssløyfen.

Strømsløyfen må ha en vesentlig høyere båndbredde enn hastighetssløyfen, og styres enten med en DSP eller med enklere elektroniske kretser.

Appendiks A

Stabilitet av lineære systemer

Et servosystem skal oppfylle en rekke spesifikasjoner, og den viktigste er at systemet skal være stabilt. Generelt kan man si at et ustabil system er ubrukelig.

Definisjon av stabilitet avhenger av den klasse systemer som behandles. Eksempler er lineære, ulineære, tids-invariante og tids-variante. Her skal stabilitetsteori for lineære tids-invariante systemer presenteres.

For lineære tids-invariante systemer er det hensiktsmessig å dele systemets respons inn i

1. *Respons med null initialverdi:* Denne responsen skyldes pådraget alene. Initialverdien til alle tilstandene i systemet er null.
2. *Respons med null pådrag:* Denne responsen skyldes initialverdiene til tilstandene alene. Pådraget er null.

Superposisjon for lineære systemer tilsier at

$$\text{Total respons} = \text{respons med null initialverdi} + \text{respons med null pådrag}$$

A.1 BIBO-stabilitet

Gitt det lineære tidsinvariante systemet

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u \quad (\text{A.1})$$

$$y = \mathbf{d}^T \mathbf{x} \quad (\text{A.2})$$

hvor y er måling, u er pådrag og \mathbf{x} er tilstandsvektoren. Anta at alle tilstander er styrbare og observerbare. På Laplacetransformert form kan systemet skrives

$$y(s) = h(s)u(s) \quad (\text{A.3})$$

hvor $h(s) = \mathbf{d}^T (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{b}$ er systemets transferfunksjon.

Før begrenset-inngang begrenset-utgang stabilitet defineres for systemet over presenteres følgende begrep:

Definisjon A.1 Det åpne venstre halvplan består av alle punkter med realdel mindre enn null. ■

Definisjon A.2 Det lukkede venstre halvplan består av alle punkter med realdel mindre eller lik null. ■

Det lukkede venstre halvplan består altså av det åpne venstre halvplan pluss den imaginære akse. Tilsvarende defineres det åpne og lukkede høyre halvplan.

Definisjon A.3 Et signal $g(t)$ er begrenset hvis det eksisterer en $M < \infty$ slik at

$$|g(t)| \leq M \quad \text{for alle } t \quad (\text{A.4})$$

I motsatt fall er $g(t)$ ubegrenset. ■

På bakgrunn av dette defineres **begrenset-inngang begrenset-utgang stabilitet** som også betegnes **BIBO-stabilitet**:

Definisjon A.4 Anta at alle systemets tilstander har null initialverdi. Systemet er da begrenset-inngang begrenset-utgang stabilt hvis målingen $y(t)$ er begrenset for alle begrensede pådrag $u(t)$. ■

For et lineært tidsinvariant system er polenes plassering avgjørende for begrenset-inngang begrenset-utgang stabilitet:

Teorem A.1 Et lineært tids-invariant system $y(s) = h(s)u(s)$ er begrenset-inngang begrenset-utgang stabilt hvis og bare hvis alle polene til $h(s)$ ligger i det åpne venstre halvplan.

Først vises hvis-delen av teoremet:

Systemets impulsrespons er

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}[h(s)] \quad (\text{A.5})$$

Under antagelsen at alle tilstander har null initialverdi er systemets måling

$$y(t) = \int_0^t h(t - \tau)u(\tau)d\tau \quad (\text{A.6})$$

Absoluttverdien av målingen blir dermed

$$|y(t)| = \left| \int_0^t h(\tau)u(t - \tau)d\tau \right| \quad (\text{A.7})$$

som betyr at

$$|y(t)| \leq \int_0^\infty |h(\tau)||u(t - \tau)|d\tau \quad (\text{A.8})$$

Anta at pådraget er begrenset:

$$|u(t)| \leq M \quad (\text{A.9})$$

hvor M er positiv og endelig. Da er

$$|y(t)| \leq M \int_0^\infty |h(\tau)| d\tau \quad (\text{A.10})$$

Hvis systemets poler ligger i det åpne venstre halvplan med $\text{Re}[\lambda_i] \leq -\alpha$ hvor $\alpha > 0$, fins det en positiv konstant $Q < \infty$ slik at

$$|h(\tau)| \leq Qe^{-\alpha\tau} \quad (\text{A.11})$$

Følgelig er

$$\int_0^\infty |h(\tau)| d\tau \leq \frac{Q}{\alpha} \quad (\text{A.12})$$

og

$$|y(t)| \leq \frac{MQ}{\alpha} < \infty \quad (\text{A.13})$$

Hvisdelen av teoremet er dermed vist.

For å vise bare-hvis delen er det tilstrekkelig å vise at for poler på den imaginære akse eller i høyre halvplan eksisterer det begrensede pådrag som gjør at målingen er ubegrenset. Først undersøkes den imaginære akse: Anta at systemet har en pol $s = 0$ i origo. Da vil det begrensede pådraget $u(t) = 1$ resultere i en måling $y(t) \propto t \rightarrow \infty$ når $t \rightarrow \infty$. Anta at systemet har et polpar $s = \pm j\omega_0$. Et begrenset pådrag $u(t) = \sin \omega_0 t$ gir da en måling $y(t) \propto t \sin \omega_0 t$ for store t som betyr at målingen er ubegrenset.

Anta så at systemet har poler i det åpne høyre halvplan. Da vil målingen bli ubegrenset for et sprang i pådraget og systemet er ustabil. ■

At målingen blir ubegrenset på grunn av poler på den imaginære akse ved passende pådrag er velkjent under betegnelsen resonans.

A.2 Stabilitet med null pådrag

Et lineært tids-invariant system

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u \quad (\text{A.14})$$

$$y = \mathbf{d}^T \mathbf{x} \quad (\text{A.15})$$

med null pådrag drives av initialverdiene til tilstandene.

Definisjon A.5 Anta at et lineært tids-invariant system som er styrbart og observerbart har null pådrag og endelige initialverdier på tilstandene. Systemet er da

1. Ustabil hvis $y(t)$ er ubegrenset:

$$y(t) \rightarrow \infty \quad \text{når } t \rightarrow \infty \quad (\text{A.16})$$

2. Stabil hvis $y(t)$ er begrenset, dvs. det eksisterer en positiv endelig konstant M slik at

$$|y(t)| \leq M \quad (\text{A.17})$$

3. Asymptotisk stabilt hvis målingen går til null asymptotisk:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0 \quad (\text{A.18})$$

■

Sammenhengen mellom stabilitet og polplassering er gitt av følgende teorem:

Teorem A.2 Et lineært tids-invariant system med null pådrag er:

1. Asymptotisk stabilt hvis alle polene ligger i det åpne venstre halvplan.
2. Stabilt hvis alle enkle poler ligger i det lukkede venstre halvplan, og i tillegg alle multiple poler ligger i det åpne venstre halvplan.
3. Ustabilt hvis det er poler i det åpne høyre halvplan eller minst en multippel pol på den imaginære akse.

Anta at systemet er observerbart, og at systemet er n -dimensjonalt som betyr at det er n tilstander. Anta videre at det er $m \leq n$ enkle poler $s = \lambda_i$, $i \in \{1, \dots, m\}$, og at de øvrige $n - m$ polene $s = \lambda_{m+1} = \dots = \lambda_n$ er sammenfallende.

Målingen blir da

$$y(t) = \sum_{i=1}^m c_i e^{\lambda_i t} + \sum_{i=0}^{n-m-1} k_i t^i e^{\lambda_n t} \quad (\text{A.19})$$

hvor c_i og k_i er konstante koeffisienter.

Av det første summeleddet er det klart at alle enkle poler må ligge i venstre halvplan for at systemet skal være asymptotisk stabilt. Hvis en av de enkle polene er på den imaginære akse, vil det være et ledd i den første summasjonen som blir en konstant, og systemet er ikke asymptotisk stabilt. Hvis den multiple polen er i høyre halvplan eller på den imaginære akse, vil det andre summeleddet være ubegrenset, og systemet er ustabil. ■

Ut fra det foregående er det klart at

Teorem A.3 Et lineært tids-invariant system er begrenset-inngang begrenset-utgang stabilt hvis og bare hvis det er asymptotisk stabilt. ■

Eksempel A.1 Gitt systemet

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (\text{A.20})$$

$$\dot{x}_2 = u \quad (\text{A.21})$$

$$y = x_1 \quad (\text{A.22})$$

som på Laplacetransformert form er

$$y(s) = \frac{1}{s^2} u(s) \quad (\text{A.23})$$

Begynnelsesbetingelsene er $x_1(t_0) = 0$ og $x_2(t_0) = 1$. Anta at pådraget er lik null. Den resulterende måling blir

$$y(t) = t \quad (\text{A.24})$$

som åpenbart ikke er begrenset når $t \rightarrow \infty$. Dette betyr at systemet er ustabilt.

Årsaken til ustabiliteten er at systemet har en dobbel pol i origo, som er på den imaginære akse. ■

Eksempel A.2 Et system med transferfunksjonen

$$h(s) = \frac{1 - s}{(1 + s)(1 + 2s)} \quad (\text{A.25})$$

er begrenset-inngang begrenset-utgang stabilt og asymptotisk stabil siden alle polene er i venstre halvplan. ■

Eksempel A.3 Systemet

$$h(s) = \frac{1}{s(1 + 2\zeta\frac{s}{\omega_0} + \frac{s^2}{\omega_0^2})} \quad (\text{A.26})$$

hvor ζ og ω_0 er positive konstanter er stabilt, men har ikke begrenset måling for alle begrensede pådrag pga. polen i origo. ■

Eksempel A.4 Systemet

$$h(s) = \frac{1}{(s^2 + \omega_0^2)^2} \quad (\text{A.27})$$

er ustabilt siden det har doble poler i $\pm j\omega_0$. ■

Referanser

- [1] B.D.O. Anderson og S. Vongpanitlerd, *Network analysis and synthesis*, Englewood Cliffs, New Jersey; Prentice Hall, 1973.
- [2] R.J. Anderson og M. Spong, "Bilateral control of teleoperators with time delay," *IEEE Trans. Automatic Control*, vol. 34, nr. 5, mai 1989, s. 494–501.
- [3] J.G. Balchen, *Reguleringsteknikk*, bind 1, Trondheim, Tapir, 1984.
- [4] J.G. Balchen, *Ulineære systemer og stabilitetsteori*, Institutt for teknisk kybernetikk, NTH, 1989.
- [5] M. Blanke, *Ship propulsion losses related to automatic steering and prime mover control*, Servolaboratoriet, Danmarks tekniske højskole, 1981.
- [6] J.L. Bower og P.M. Shultheiss, *Introduction to the design of servomechanisms*, New York, John Wiley, 1958.
- [7] E. Butkov, *Mathematical physics*, Reading, Massachusetts; Addison-Wesley, 1968.
- [8] C.A. Desoer og E.S. Kuh, *Basic circuit theory* London, McGraw-Hill International, 1969.
- [9] C.A. Desoer og M. Vidyasagar, *Feedback systems: Input-output properties*, New York, Academic Press, 1975.
- [10] R.C. Dorf, *Modern control systems*, Reading, Massachusetts; Addison-Wesley, 1981.
- [11] J.C. Doyle, B.A. Francis og A.R. Tannenbaum. *Feedback control theory*, New York, Macmillan, 1992.
- [12] C.H. Edwards, Jr. og D.E. Penney, *Calculus and Analytic Geometry*, Second Edition, Englewood Cliffs, New Jersey; Prentice Hall, 1982.
- [13] O. Egeland og J.G. Balchen, "Cartesian control of a spray-painting robot with redundant degrees of freedom," *Modeling, Identification and Control*, vol. 8, nr. 3, 1987, s. 137–148.
- [14] G.F. Franklin, J.D. Powell og A. Emami-Naeini, *Feedback control of dynamic systems*, Reading, Massachusetts; Addison-Wesley, 1986.
- [15] G.F. Franklin, J.D. Powell og M.L. Workman, *Digital control of dynamic systems*, Reading, Massachusetts; Addison-Wesley, 1990.

- [16] J.S. Freudenberg og D.P. Looze. "Right half plane poles and zeros and design tradeoffs in feedback systems," *IEEE Trans. on Automatic Control*, vol. 30, nr. 6, juni 1985, s. 555–565.
- [17] G.H. Golub og C.F Van Loan, *Matrix computations*, Baltimore, The Johns Hopkins University Press, 1989.
- [18] F. Irgens, *Dynamikk*, Trondheim, Tapir, 1990.
- [19] B.W. Kernighan og D.M. Ritchie, *The C programming language*, Englewood Cliffs, New Jersey; Prentice Hall, 1988.
- [20] E. Kreyszig, *Introductory functional analysis with applications*, New York, John Wiley, 1978.
- [21] E. Kreyszig, *Advanced engineering mathematics*, New York, John Wiley, 1988.
- [22] B.C. Kuo, *Automatic control systems*, 6. utg., London, Prentice-Hall, 1991.
- [23] L. Meirovitch, *Dynamics and control of structures*, New York, John Wiley & Sons, 1990.
- [24] H.E. Merritt, *Hydraulic control systems*, New York, John Wiley & Sons, 1967.
- [25] N. Mohan, T.M. Undeland og W.P. Robbins, *Power electronics: Converters, Applications and design*, New York, John Wiley, 1989.
- [26] K.S. Narendra og A.M. Annaswamy, *Stable adaptive systems*, Englewood Cliffs, New Jersey; Prentice-Hall, 1989.
- [27] A.W. Naylor og G.R. Sell, *Linear operator theory in engineering and science*, New York, Springer Verlag, 1982.
- [28] P.J. Nicklasson, *Adaptiv regulering av roboter med elastiske ledd*. Hovedoppgave, Institutt for teknisk kybernetikk, NTH, 1991.
- [29] A.V. Oppenheim, A.S. Willsky og I.T. Young, *Signals and systems*, Englewood Cliffs, New Jersey; Prentice-Hall, 1983.
- [30] V.M. Popov, *Hyperstability of control systems*, Berlin, Springer-Verlag, 1973.
- [31] S.S. Rao, *Mechanical vibrations*, Reading, Massachusetts; Addison-Wesley, 1990.
- [32] Robbins & Myers/Electro-Craft, *DC motors, speed controls, servo systems*, håndbok utgitt av Robbins & Myers/Electro-Craft, 6950 Washington Avenue South, Eden Prairie, Minnesota 55344, USA.
- [33] T. Rølvåg, H.P. Hildre, O.I. Sivertsen og Å.Ø. Valøen, "Multidicipline simulation of elastic manipulators," *Modeling Identification and Control*, vol. 13, no. 4, 1992, s. 221–240.
- [34] A.S. Sedra og K.C. Smith, *Microelectronic circuits*, New York, Holt, Rinehart and Winston, 1984.

- [35] J.-J.E. Slotine og W. Li, *Applied nonlinear control*, Englewood Cliffs, New Jersey; Prentice Hall, 1991.
- [36] O.A. Solheim, *Instrumenteringsteknikk*, Trondheim, Tapir, 1979.
- [37] H. Stark og F.B. Tuteur, *Modern electrical communications*, Englewood Cliffs, New Jersey; Prentice Hall, 1979.
- [38] G. Strang, *Linear algebra and its applications*, New York, Academic Press, 1980.
- [39] A.J. Sørensen, *Modeling and control of SES dynamics in the vertical plane*, dr.ing.-avhandling, Institutt for teknisk kybernetikk, NTH, 1993.
- [40] M. Vidyasagar, *Nonlinear systems analysis*, Second Edition, Englewood Cliffs, New Jersey; Prentice Hall, 1993.
- [41] J.T. Wen, "Time domain and frequency domain conditions for strict positive realness," *IEEE Trans. Automatic Control*, vol. 33, nr. 10, oktober 1988, s. 988–992.
- [42] M.R. Wohlers, *Lumped and distributed passive networks*, New York, Academic Press, 1969.

Stikkord

- L_2 , 175
- $\mathbb{C}^{m \times m}$, 130
- åpent halvplan, 335

- A-stabilitet, 325
- akselerasjonskonstant, 19
- aktiv fjæring, 122
- aktiv stav, 150
- analog P, 296
- analog PD, 296
- analog PID, 296
- analogt sugfilter, 308
- analytisk funksjon, 151
- ankerstrøm, 2
- assembler, 332
- atm, 48
- autopilot, 244
- avkortet funksjon, 112, 176

- bølgeligningen, 128, 166
- børsteløs likestrømsmotor, 4
- bar, 48
- Barbalats lemma, 179
- begrenset, 336
- begrenset reell, 151, 157
- Bessel-filter, 273, 277, 306
- BIBO-stabilitet, 335
- blanketid, 15
- bulkmodul, 47
- Butterworth-filter, 273, 306

- C, 332
- Chebyshev-filter, 306
- Choleskydekomposisjon, 324

- dødbånd i servoforsterker, 15
- deplasement, 50
- derivasjon av referansen, 299
- digital signalprosessor, 334
- diskretisering av transferfunksjoner, 328
- diskretisert PD-regulator, 329
- diskretisert PID-regulator, 330
- distribuert elastisitet, 228
- distribuert elastisitet i lasten, 235

- dynamisk posisjonering, 131, 314
- dynamisk tilbakekobling, 27

- elastisk last drevet av to motorer, 221
- elastisk last med flere frihetsgrader, 215
- elastisk last, energibetraktning, 208
- elastisk last, regulatorstruktur, 210
- elektrisk tidskonstant, 6
- elektrisk transmisjonslinje, 158
- elektrohydraulisk hastighetsservo, 71
- elektrohydraulisk posisjonsservo, 62
- elektrohydraulisk servomekanisme, 60
- elektronisk kommutering, 4
- en-kvadrant forsterker, 12
- en-kvadrantstyring, 10
- energibetraktning for likestrømsmotor, 223
- Euler-Bernoulli bjelke, 229
- Eulers bakovermetode, 320
- Eulers metode, 317, 319
- Eulers metode for oscillatorisk system, 318, 320
- Eulers metode, stabilitetsområde, 317

- feltstrøm, 2
- filtetid i diskret PD-regulator, 332
- filtrering av referanse, 301
- filtrering av referansen, 283
- fire-kvadrantstyring, 11
- foroverkobling, 263
- foroverkobling for robot, 266
- foroverkobling likestrømsmotor, 263
- foroverkobling over referanseinnngang, 269
- foroverkobling ved seriekompensasjon, 267
- foroverkobling, $M(s)$ og $N(s)$, 265
- foroverkobling, hydraulisk motor, 267
- foroverkobling, ideell, 263
- foroverkobling, ideell for robot, 265
- foroverkobling, realiserbar ideell, 266
- forsyningstrykk, 60
- Fouriertransformasjonen, 111
- frekvensbegrenset derivasjon, 301
- full brokobling, 14

- Gausseliminering, 324

- gir, 7
- H-bro, 14
- hastighetsforoverkobling, 269
- hastighetskonstant, 22, 24, 63
- hastighetskonstant for PD2, 301
- hastighetsprofil, 281
- hastighetsstyring, 18
- hastighetsstyringer, 12
- hermitisk matrise, 130
- hydraulisk motor med elastisk last, 226
- hydraulisk posisjonsservo, stabilitetsgrense, 64
- hydraulisk resonansfrekvens, 55
- hydraulisk transmisjonslinje, 164, 169, 171
- ideelt lavpassfilter, 271
- impedanstillpasning, 135
- integral wind-up, 295
- integralledd, utkobling ved metning, 295
- integralledd, utladning ved metning, 296
- invariante mengder, 223
- invertert pendel, 256
- Jurys kriterium, 321
- Kalman-Yakubovitch ligninger, 171
- Kalmanfilter, 303
- kausaltet, 271
- klokkeavbrudd, 333
- kodeskive i hastighetssløyfe, 331
- kollokasjon av pådrag og måling, 228
- kommutering, 2
- konsentrert elastisitet, 228
- konstant tidsforskyvning, 273
- konvergens i L_2 , 179
- koordinering av flere motorer, 278
- kraftforsterker, 10
- krenging i sving, 124
- LaSalles teorem, 223
- lavpassfilter, 306
- lineær fasegang, 273
- liten forsterkning, 201
- Lorentz kraftlov, 2
- LU-dekomposisjon, 324
- luftputekatamaran, 126
- lukket halvplan, 336
- magnetisk nordpol, 3
- magnetisk sydpol, 3
- mekanisk effekt, 1
- mekanisk ekvivalent, 120
- mekanisk PD-regulator, 120
- mekanisk tidskonstant, 6
- mekanisk toport, 143
- metning, 294
- minimum tidsforbruk, 279
- moment-hastighetsdiagram, 10
- momentkonstant, 5
- motor med elastisk last, 205
- notch filter, 307
- nullpunkt i høyre halvplan, 228, 238, 251
- observer, 303
- oljehydraulikk, 47
- operativsystem, 333
- Parsevals teorem, 111, 177
- passiv operator, 182
- passiv PID-regulator, 118, 119
- passive elektriske kretser, 115
- passive lineære systemer, 111
- passive systemer, parallellkobling, 110
- passive systemer, tilbakekobling, 110
- passivitet, 228
- passivitet og stabilitet, 116
- passivitet, hydraulikk, 228
- passivt system, 107
- PD-regulatorer for robotstyring, 225
- PD1-regulator, 299
- PD2-regulator, 299
- piezoelektrisk aktuator, 147
- piezoelektrisk lastcelle, 150
- pol/nullpunkt-forkorting, 246
- poler i høyre halvplan, 241
- positiv reell, 154
- preprogrammert referanse, 277
- proper, 178
- psi, 48
- pumpestyrt motor, 58
- punkt-til-punkt styring, 279
- rasjonal funksjon, 151
- rasjonal transferfunksjon, 113
- realisering, 313
- reduksjonsgir, 7
- referansegenerering, 279
- regulatorprogram, 333
- resonansfrekvens, begrenset system, 206
- resonansfrekvens, ubegrenset system, 207
- rotkurvetmetoden, 79
- rotkurvenes asymptoter, 85
- rotkurver, krysspunkt, 90

rotkurver, skjæring med imaginær akse, 90
rotor, 2
Runge-Kutta fjerdeordens metode, 326

Schwarz ulikhet, 177
sector, 183, 187
sektorulinearitet, 183, 187
sentroide, 86
servoforsterker, 12
servoventil, 50
SES, 126
small gain theorem, 201
spenning-strømdiagram, 11
spenningskonstant, 5
spesifikasjoner, 285
spredningsbeskrivelse, 132, 137
spredningsfunksjon, 132
stabilitet, 335
stator, 2
steppermotorer, 4
strømningskonstant, 56
strømtilbakekobling, 15, 16
streng positiv reell, 171
stykkevis konstant akselerasjon, 280
sugefilter, 307
synkronmotor, 4

T-bro, 16
tastefrekvens, 332
telegraf ligningen, 159
telemanipulering, 168
tidsforskyvning, 272, 306
to-kvadrant forsterker, 12
to-kvadrantstyring, 11
toport, impedansform, 139
toport, kaskadeform, 141
toport, spredningsform, 139
toprt, hybrid form, 140
trapesmetoden, 322
trapesmetoden på eksplisitt form, 324, 325
trykktilbakekobling, 73
type, 289
type 0, 289
type 1, 289
type 2, 289
type mhp støy, 290

variabelt deplasement, 58
varierende treghetsmoment, 65
ventilstyrt motor, 54
vibrasjonsdemping, 147, 150
vippetass, 25